

3 ESTIMACION DE LOS PARAMETROS DE CRECIMIENTO

El estudio del crecimiento de los peces, significa básicamente determinar el tamaño corporal en función de la edad. Por lo tanto, todos los métodos de evaluación de poblaciones trabajan esencialmente con datos de composición por edades. En general, estos datos se pueden obtener mediante el recuento de los anillos que representan edad en las partes duras, como escamas y otolitos. Estos anillos se forman por las fuertes fluctuaciones que ocurren en las condiciones ambientales de verano a invierno y viceversa. En las zonas tropicales no se producen estos cambios drásticos y, en consecuencia es muy difícil, si no imposible, utilizar este tipo de anillos estacionales para determinar la edad.

Sólo recientemente se han desarrollado métodos que emplean estructuras mucho más exactas, llamadas anillos diarios, para calcular la edad del pez en número de días. No obstante, como estos métodos requieren un equipo especial de alto costo y mucho esfuerzo humano, no es probable que se apliquen en forma rutinaria en muchos lugares.

Afortunadamente, se han elaborado varios métodos numéricos que permiten convertir las frecuencias de tallas en composición por edades. Aunque estos métodos no requieren disponer de lecturas de los anillos que se forman en las partes duras, la interpretación final de los resultados es mucho más fiable si se dispone al menos de algunas lecturas de edad, realizadas en forma directa. Lo más conveniente para evaluar poblaciones de especies tropicales es, por lo tanto, el análisis de un gran número de datos de frecuencias de tallas, combinado con un número pequeño de lecturas de edad, basadas en los anillos diarios. Este manual no se ocupa de las técnicas de determinación de la edad, pero ofrece referencias de publicaciones específicas (véase la Sección 3.2.1).

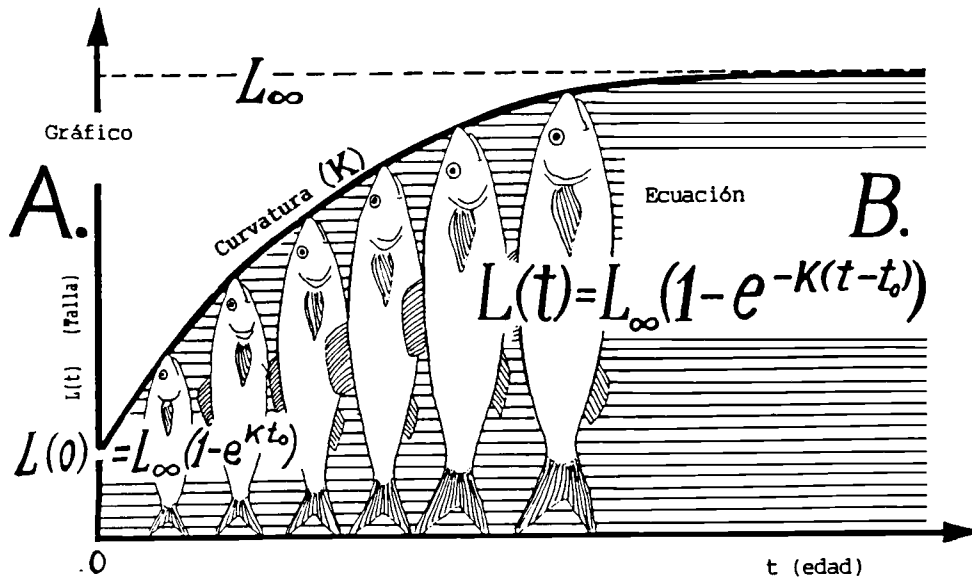
3.1 LA ECUACION DE CRECIMIENTO DE VON BERTALANFFY

Pütter (1920) elaboró un modelo de crecimiento que se puede considerar la base de la mayoría de los otros modelos de crecimiento, incluido el desarrollado por von Bertalanffy (1934) que es un modelo matemático para el crecimiento individual, que ha demostrado ser ajustable al crecimiento observado en la mayoría de las especies de peces. La teoría en que se fundamentan varios de los modelos de crecimiento ha sido descrita por Beverton y Holt (1957), Ursin (1968), Ricker (1975), Gulland (1983), Pauly (1984) y Pauly y Morgan (1987), pero aquí sólo se analiza el modelo de crecimiento de von Bertalanffy, que considerará la talla del cuerpo como una función de la edad. Este método se ha convertido en una de las piedras angulares de la biología pesquera, ya que se ha usado como submodelo en modelos más complejos que describen la dinámica de poblaciones de peces. La Fig. 3.1.0.1 ilustra el modelo tanto en forma gráfica como en forma matemática.

El modelo matemático, B, expresa la talla o longitud, L, como una función de la edad del pez, t:

$$L(t) = L_{\infty} * [1 - \exp(-K*(t-t_0))] \quad (3.1.0.1)$$

En el lado derecho de la ecuación figuran la edad, t, y algunos parámetros, que son: “ L_{∞} ” (léase como “*L-infinito*”), “K” y “ t_0 ” (léase “*t-cero*”). Con distintos conjuntos de parámetros se crearán curvas de crecimiento diferentes, por lo que es posible usar el mismo modelo básico para describir el crecimiento de diferentes especies, empleando simplemente un conjunto especial de parámetros para cada una de ellas.



Para ilustrar el uso del modelo, suponga que los tres parámetros han sido estimados para algún stock particular de peces y que los valores son:

$$L_{\infty} = 50 \text{ cm}, K = 0.5 \text{ por año y } t_0 = -0.2 \text{ años}$$

Estos valores se insertan en la ecuación de crecimiento de von Bertalanffy (Ec. 3.1.0.1):

$$L(t) = 50 * [1 - \exp(-0.5 * (t + 0.2))]$$

Mediante dicha ecuación se puede calcular la talla en cm de un pez promedio para cualquier edad del stock en estudio, reemplazando en la ecuación el valor de t con la edad deseada. Por ejemplo, para $t = 2$ años:

$$L(2) = 50 * [1 - \exp(-0.5 * (2 + 0.2))] = 33.4 \text{ cm}$$

De este modo, conociendo los parámetros se puede calcular la talla de los peces de este stock a cualquier edad:

edad del pez (año)	talla del pez (cm)
0.5	14.8
1.0	22.6
1.5	28.6
2.0	33.4
3.0	39.9
5.0	46.3
.....	etc.

Con esta tabla se puede hacer un gráfico (*curva de crecimiento*) para este conjunto de parámetros, como se presenta en la Fig. 3.1.0.1.

Hasta cierto punto los parámetros se pueden interpretar biológicamente. L_{∞} se interpreta como “la talla media de un pez muy viejo (en sentido estricto: infinitamente viejo)”, parámetro que también es denominado como la “longitud asintótica” (véase la Fig. 3.1.0.1). K es el “parámetro de curvatura”, que determina la rapidez con que el pez alcanza L_{∞} . Algunas especies, la mayoría de ellas de vida corta, prácticamente alcanzan L_{∞} en uno o dos años y tienen un valor alto de K . Otras especies tienen una curva de crecimiento aplanada con un K bajo y necesitan muchos años para alcanzar L_{∞} . Esto se ilustra en la Fig. 3.1.0.2. El tercer parámetro, t_0 , a veces llamado “parámetro de condición inicial”, determina el punto en el tiempo, en el que el pez tiene una talla cero. Biológicamente, esto no tiene significado, ya que el crecimiento comienza a nivel larval, pero se puede hablar de $L(0)$ cuando se establece que t es igual a 0 el día del nacimiento. Se identifica fácilmente insertando $t = 0$ en la Ec. 3.1.0.1:

$$L(0) = L_{\infty} * (1 - \exp(-K * t_0))$$

No obstante, $L(0)$ puede no ser una estimación realista de la talla al nacer, debido a que las larvas no siempre crecen de acuerdo con el modelo de von Bertalanffy. Lo importante es que los peces con edad suficiente para ser explotados, generalmente, sí se ajustan al modelo. Por lo tanto, hay que prestar atención a la descripción del crecimiento de los peces más grandes (explotados).

Los peces aumentan de talla a medida que aumenta su edad, pero su “tasa de crecimiento”, esto es el incremento de talla por unidad de tiempo, disminuye a medida que el pez va envejeciendo, aproximándose a cero cuando estos son muy viejos. La tasa de crecimiento se puede definir por:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L(t+\Delta t) - L(t)}{\Delta t} \text{ cm/año} \quad (3.1.0.2)$$

El tiempo (o edad) se mide a menudo en años, pero si la tasa de crecimiento se mide por mes, entonces

$$\Delta t = 1/12 \text{ años} = 0.0833 \text{ años}$$

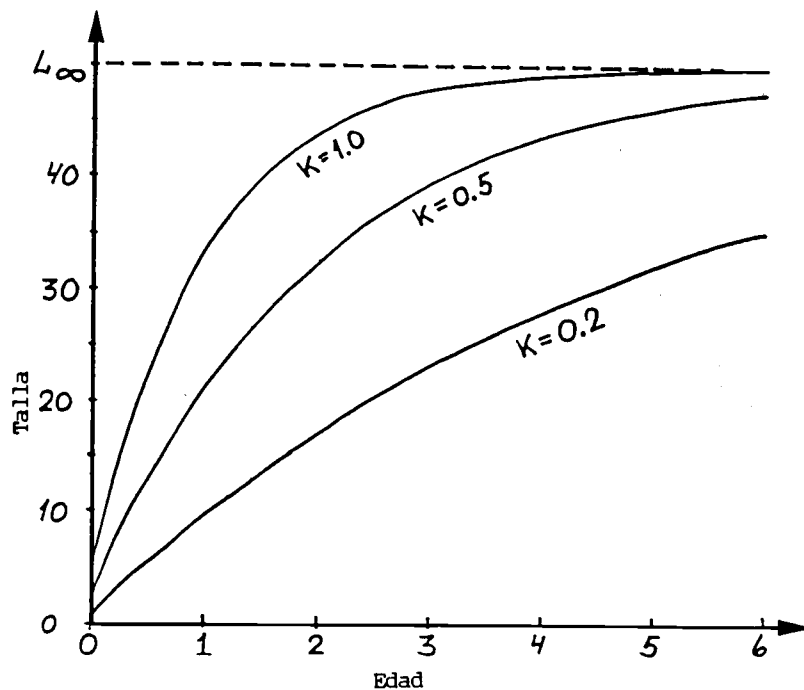


Fig. 3.1.0.2 Familia de curvas de crecimiento, con diferentes parámetros de curvatura (diferentes valores de K).

o, si es por día,

$$\Delta t = 1/365 \text{ años} = 0.00274 \text{ años}$$

En la Tabla 3.1.0.1 las edades (en años) y las tallas al comienzo de cada año (en cm), correspondientes al ejemplo que se entrega en la Fig. 3.1.0.1, se listan en las columnas A y B, respectivamente. La tasa de crecimiento, a su vez, se encuentra en la columna C. Se hace evidente que la tasa de crecimiento decrece a medida que el pez se hace mas viejo. La relación matemática entre la talla del pez y la tasa de crecimiento en un tiempo determinado, sigue una función lineal:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = a + b \cdot L(t) \quad \text{cm/año} \quad (3.1.0.3)$$

Esta relación lineal puede ser derivada de la ecuación de crecimiento de Von Bertalanffy, de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = K \cdot (L_{\infty} - L(t)) \quad \text{cm/año} \quad (3.1.0.4)$$

donde

$$K = -b \quad \text{y} \quad L_{\infty} = -a/b$$

Aquí, sin embargo, se prescindirá de la prueba matemática. Esta relación lineal será usada en las secciones siguientes para determinar los parámetros de crecimiento K y L_{∞} . En la Fig. 3.1.0.3 se presenta un ejemplo donde la tasa de crecimiento $\Delta L/\Delta t$, como la variable dependiente, es graficada para el año correspondiente, respecto de la talla media, $\bar{L}(t)$, como variable independiente (véase la columna D de la Tabla 3.1.0.1):

$$\bar{L}(t) = \frac{L(t+\Delta t) + L(t)}{2}$$

TABLA 3.1.0.1
La tasa de crecimiento como función de la edad, correspondiente a la curva de crecimiento de la Fig. 3.1.0.1

A	B	C	D
edad	talla	tasa de crecimiento	talla media
t	L(t)	$\frac{L(t+1) - L(t)}{1} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$	$\frac{L(t+\Delta t) + L(t)}{2} = \bar{L}(t)$
años	cm	cm/año (y)	cm (x)
1	25.7	10.3	30.9
2	36.0	6.9	39.5
3	42.9	4.6	45.2
4	47.5	3.2	49.1
5	50.7	2.1	51.8
6	52.8	1.4	53.5
7	54.2		

De la Ec. 3.1.0.4 se desprende que si $\bar{L}(t) = L_{\infty}$ entonces $\Delta L/\Delta t = K*(L_{\infty} - L_{\infty}) = 0$, esto quiere decir que cuando el pez alcanza la talla L_{∞} la tasa de crecimiento pasa a ser cero y, por lo tanto, L_{∞} es la talla promedio máxima para un pez. Esta situación está ilustrada en la Fig. 3.1.0.3. En el punto en donde la línea de regresión alcanza al eje x, equivale a $\Delta L/\Delta t = 0$ y el valor de $\bar{L}(t)$ corresponde a L_{∞} . Más adelante, K, podrá ser deducido de la pendiente de la regresión (véase la Sección 3.3.1).

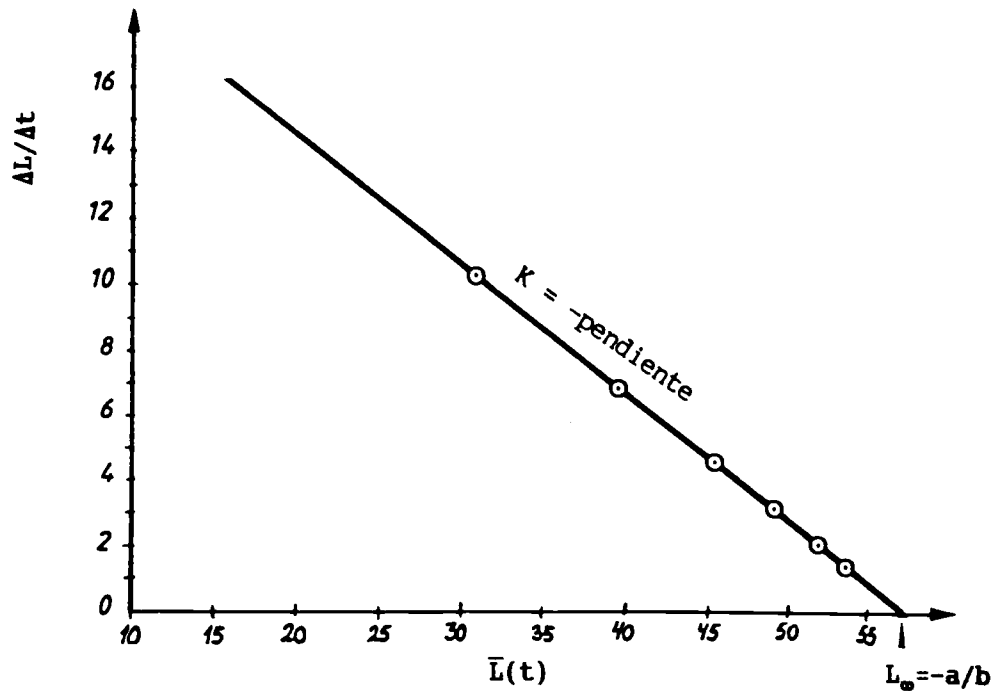


Fig. 3.1.0.3 Gráfico de la tasa de crecimiento *versus* la talla. Se utilizan los valores de las columnas C y D, de la Tabla 3.1.0.1.

3.1.1 Variabilidad y aplicabilidad de los parámetros de crecimiento

Los parámetros de crecimiento difieren, por supuesto, de una especie a otra, pero también pueden variar de una población a otra dentro de una misma especie, es decir, los parámetros de crecimiento de una especie particular pueden tener valores diferentes en distintas partes de su recorrido. También cohortes sucesivas pueden crecer de forma diferente según las condiciones ambientales. Además, los parámetros de crecimiento varían a menudo en función del sexo. Si se observan diferencias pronunciadas, los datos de entrada deben ser separados por sexo y los valores de K, L_{∞} y t_0 se deben estimar separadamente para machos y hembras.

Aunque la fisiología de los crustáceos es muy diferente de la de los peces, el crecimiento corporal parece también adecuarse al modelo de crecimiento de von Bertalanffy (véase, por ejemplo, García y Le Reste, 1981). Un crustáceo aislado (es decir, un camarón o una langosta) no se ajusta lógicamente al modelo de von Bertalanffy, sino a alguna "curva de pasos sucesivos" en la que cada paso representa una muda (como se ilustra en la Fig. 3.1.1.1). Pero como los miembros de una cohorte mudan en tiempos diferentes, la curva de crecimiento medio de una cohorte de crustáceos se convierte en una curva suave (línea punteada). Para mayor información sobre el modelado de la dinámica de una población de crustáceos, se puede consultar, por ejemplo, a Jamieson y Bourne (1986) y Caddy (1987).

(Véanse los **Ejercicios** en la Parte 2).

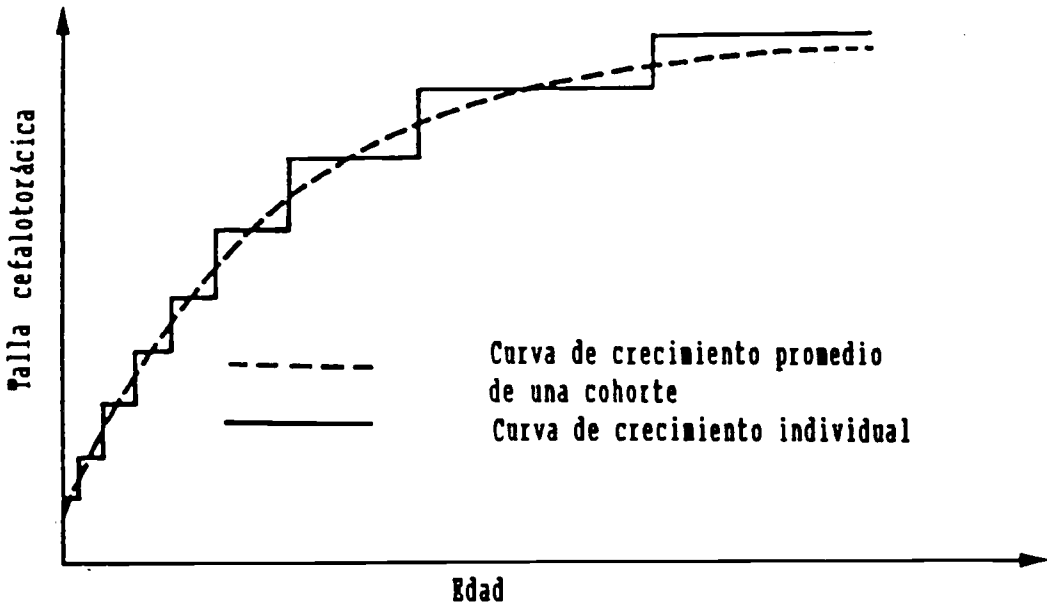


Fig. 3.1.1.1 Curva de crecimiento individual y curva de crecimiento promedio de la cohorte en crustáceos.

3.1.2 La ecuación de crecimiento de von Bertalanffy convertida a peso

Combinando la ecuación de crecimiento de von Bertalanffy (Ec. 3.1.0.1)

$$L(t) = L_{\infty} * [1 - \exp(-K*(t-t_0))]$$

con la relación peso/talla (Ec. 2.6.1):

$$W(t) = q * L^3(t)$$

se obtiene el peso de un pez como función de la edad:

$$W(t) = q * L_{\infty}^3 * [1 - \exp(-K(t-t_0))]^3$$

El “peso asintótico”, W_{∞} , correspondiente a la talla asintótica es (según la Ec. 2.6.1):

$$W_{\infty} = q * L_{\infty}^3$$

El parámetro, q , se denomina “factor de condición”. (Tómese debida consideración que la letra q también se usa en este manual para designar el coeficiente de capturabilidad, Sección 4.3). Así pues, “la ecuación de von Bertalanffy convertida a peso” se puede escribir como sigue:

$$W(t) = W_{\infty} * [1 - \exp(-K*t-t_0)]^3 \quad (3.1.2.1)$$

La Fig. 3.1.2.1, muestra como ejemplo la ecuación de crecimiento convertida a peso para los parámetros de von Bertalanffy: $L_{\infty} = 28.4$ cm, $K = 0.37$ por año, $t_0 = -0.2$ años, y el factor de condición $q = 0.125$ g por cm^3 . Estos parámetros fueron estimados para la baga, *Nemipterus marginatus*, en aguas del norte de Borneo (Pauly, 1983).

(Véanse los Ejercicios en la Parte 2).

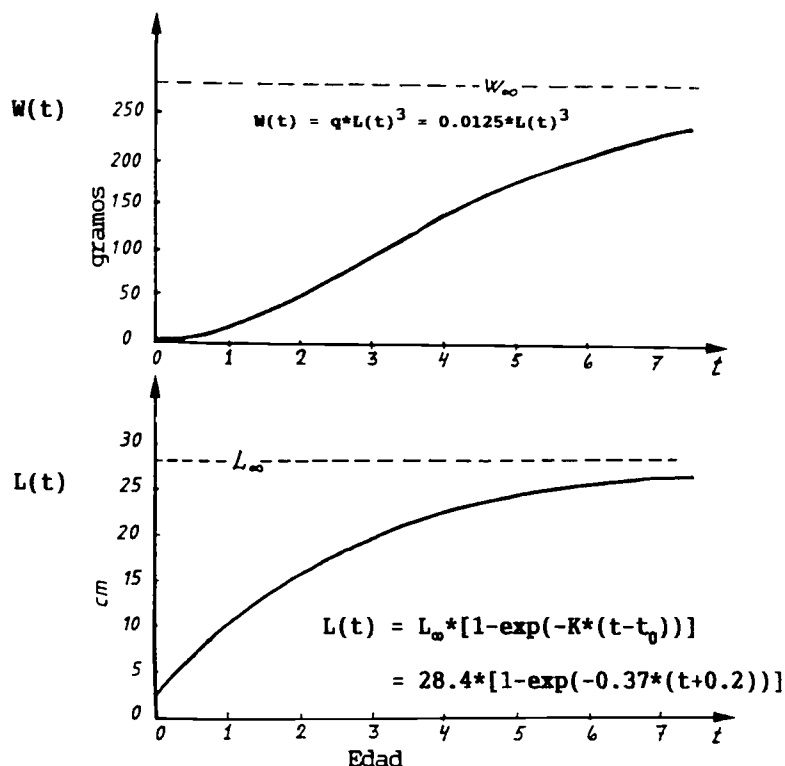


Fig. 3.1.2.1 Curva de crecimiento basada en la talla y la correspondiente curva de crecimiento basada en el peso.

3.2 DATOS PARA LA ECUACION DE CRECIMIENTO DE VON BERTALANFFY

Existen varias maneras de obtener datos de entrada para los métodos que sirven para estimar los parámetros de crecimiento L_{∞} , K y t_0 . Los métodos se pueden clasificar en tres grupos generales:

- 1) Determinación de la edad y mediciones de tallas combinadas:
 - a) datos de reconocimientos de recursos con un buque de investigación
 - b) datos de muestras tomadas de capturas comerciales
- 2) Mediciones de tallas solamente:
 - a) datos de reconocimientos de recursos con un buque de investigación
 - b) datos de muestras tomadas de capturas comerciales
- 3) Experimentos de recuperación de ejemplares marcados, donde se obtienen dos (o más) medidas de talla, a saber, en el momento del marcado (generalmente en un buque de investigación) y en el momento de la recuperación (generalmente en faenas de pesca comerciales). Este método es excelente desde el punto de vista teórico, pero difícil y costoso de ejecutar. Aquí no se incluirá este método, con excepción del Ejercicio 3.3.1 (véase también Jones, 1977).

A continuación se examinará el punto 1a), en la Sección 3.2.1, y luego el punto 2b), en la Sección 3.2.2.

3.2.1 Datos derivados de lecturas de la edad y mediciones de la talla

Como se señaló en la introducción de este capítulo, la determinación de la edad es una técnica relativamente simple en el caso de las especies de aguas templadas, debido a que sus otolitos o escamas

presentan anillos estacionales, uno de verano y otro de invierno, que juntos forman un anillo anual. En algunos casos tales anillos se pueden observar a simple vista. En otros, pueden hacerse visibles con técnicas simples, como el quemado. Los anillos anuales proporcionan suficiente información para la mayoría de los fines de la evaluación de poblaciones.

Desafortunadamente, las especies tropicales rara vez presentan anillos anuales claros en sus otolitos o escamas, debido a la ausencia de la estacionalidad marcada, que caracteriza a las zonas templadas. Sin embargo, descubrimientos recientes han hecho posible leer también las edades de los peces tropicales, aunque dentro de unos márgenes limitados y a un alto costo en términos de fuerza de trabajo e inversión inicial. Profundizando el estudio de la formación de los anillos en los otolitos y escamas, se ha descubierto que los incrementos diarios (o incluso los causados por cierta ingesta alimentaria) se pueden detectar mediante un buen microscopio. Los últimos descubrimientos indican que a veces los anillos diarios son tan delgados que no se detectan con un microscopio ordinario, cuya potencia está limitada por la longitud de onda de la luz. Tales anillos sólo se pueden leer mediante un microscopio electrónico de barrido (Morales Nin, 1991).

En los últimos años se ha publicado mucho sobre este tema, por ejemplo: Panella (1971); Bagenal (1974); Brothers (1980); Beamish y McFarlane (1983); Gjøsæter *et al.* (1983); Dayaratne y Gjøsæter (1986); y, Williams (1986).

Un manual sobre evaluación de poblaciones de peces tropicales se ha de concentrar en las mediciones de tallas y, por consiguiente, dar menos importancia a los datos sobre la edad. No obstante, aquí se profundizará sobre la edad por dos razones. En primer lugar, porque algunas veces es posible efectuar un pequeño número de lecturas de edad, que se pueden utilizar para calibrar los resultados obtenidos de las mediciones de tallas únicamente. En segundo lugar, porque es más fácil explicar los conceptos y la teoría a partir de datos de edad y de talla que sólo sobre la base de las tallas. También se utilizan datos de los buques de investigación para evitar mayores complicaciones en esta etapa. El primer ejemplo se basa en los datos de una sola prospección, mientras que el segundo utiliza los datos de una serie cronológica de reconocimientos.

Ejemplo 3: Datos sobre composición por tallas/edades de una sola prospección

Suponga que se tiene una muestra aleatoria de peces de una población. Esta muestra fue tomada en un crucero de prospección de, por ejemplo, quince días de duración, en el que se efectuaron lances de arrastre en toda el área de distribución del stock, de tal modo que los datos combinados de todos los lances constituyen una muestra aleatoria (véase la Sección 7.1). Suponga que la prospección se llevó a cabo en otoño de 1983 y que se obtuvieron los datos combinados de frecuencias de tallas que aparecen en la última columna de la Tabla 3.2.1.1 (y también en la Fig. 3.2.2.1). Además, considere que se han observado dos temporadas anuales de reclutamiento máximo y, por lo tanto, se ha decidido definir dos cohortes por año:

Cohorte de primavera : peces reclutados de enero a junio
Cohorte de otoño : peces reclutados de julio a diciembre

Una cohorte ha sido definida previamente como "un grupo de peces en el cual todos tienen la misma edad y pertenecen al mismo stock" (véase la Sección 1.3.1).

Ahora, suponga también que es posible leer la edad de cada pez, de modo que se pueda determinar el día en el cual nació cada uno de ellos. Después de leer las edades de los 439 peces de la especie A, capturados en la prospección realizada en octubre de 1983, se puede asignar cada pez a una cohorte específica. Entonces es posible hacer una distribución de frecuencias de tallas para cada cohorte. Teóricamente, las frecuencias respecto a las tallas presentarían una distribución normal, para las cuales se pueden determinar la talla media y la desviación estándar.

La compleja tabla de frecuencias de tallas, obtenida mediante la prospección, ha resultado dividida en seis diferentes columnas de frecuencia de tallas correspondientes, cada una de ellas, a las diferentes cohortes presentes en la muestra total, a las cuales también se le conoce ahora su edad

media. La información contenida en las primeras siete columnas de la Tabla 3.2.1.1 se denomina "clave talla/edad" (este concepto se tratará más detenidamente en el Ejemplo 7). Los principales datos de cada cohorte han sido resumidos en la Tabla 3.2.1.2.

TABLA 3.2.1.1
Composición talla/edad (ejemplo hipotético). Datos básicos para la confección de la Tabla 3.2.1.2.
El gráfico de las frecuencias de tallas totales se muestra en la Fig. 3.2.2.1 ("-" representa una observación cero)

intervalo de talla cm	estación de reclutamiento (cohorte)						prospección octubre 1983 total de todos los lances
	primavera 1983	otoño 1982	primavera 1982	otoño 1981	primavera 1981	otoño 1980	
12-13	1	-	-	-	-	-	1
13-14	4	-	-	-	-	-	4
14-15	11	-	-	-	-	-	11
15-16	24	-	-	-	-	-	24
16-17	38	-	-	-	-	-	38
17-18	42	-	-	-	-	-	42
18-19	33	-	-	-	-	-	33
19-20	20	-	-	-	-	-	20
20-21	7	-	-	-	-	-	7
21-22	2	1	-	-	-	-	3
22-23	-	3	-	-	-	-	3
23-24	-	5	-	-	-	-	5
24-25	-	8	-	-	-	-	8
25-26	-	11	-	-	-	-	11
26-27	-	14	-	-	-	-	14
27-28	-	16	1	-	-	-	17
28-29	-	15	1	-	-	-	16
29-30	-	13	2	-	-	-	15
30-31	-	11	3	-	-	-	14
31-32	-	7	4	-	-	-	11
32-33	-	4	6	1	-	-	11
33-34	-	2	7	1	-	-	10
34-35	-	1	7	1	-	-	9
35-36	-	-	8	2	-	-	10
36-37	-	-	7	3	1	-	11
37-38	-	-	6	3	1	-	10
38-39	-	-	5	4	1	-	10
39-40	-	-	4	4	2	1	11
40-41	-	-	3	5	2	1	11
41-42	-	-	2	4	2	1	9
42-43	-	-	1	3	2	1	7
43-44	-	-	-	3	3	1	7
44-45	-	-	-	2	2	1	5
45-46	-	-	-	2	2	2	6
46-47	-	-	-	1	2	2	5
47-48	-	-	-	1	1	1	3
48-49	-	-	-	-	1	1	2
49-50	-	-	-	-	1	1	2
50-51	-	-	-	-	1	1	2
51-52	-	-	-	-	-	1	1
total	182	111	67	40	24	15	439
talla media	17.3	27.9	35.3	40.2	43.3	45.5	
desviación estándar	1.7	2.7	3.4	3.6	3.8	3.6	
edad media (años)	0.64	1.16	1.65	2.10	2.64	3.21	

TABLA 3.2.1.2
Ejemplo hipotético de los datos de composición por edades y
tallas de la especie A, obtenidos en un crucero de prospección
realizado en octubre de 1983 (derivado de los “datos crudos”
de la Tabla 3.2.1.1)

COHORTE		número observado	edad media (años)	talla media (cm)
año y estación del reclutamiento				
1983	primavera	182	0.64	17.3
1982	otoño	111	1.16	27.9
1982	primavera	67	1.65	35.3
1981	otoño	40	2.10	40.2
1981	primavera	24	2.64	43.3
1980	otoño	15	3.21	45.5
total		439		

Los datos combinados de todos los lances pueden entonces dividirse en cohortes, una vez determinadas las edades, y se pueden calcular los promedios de talla y edad de cada cohorte. Las frecuencias de tallas de cada cohorte aparecen también en la Tabla 3.2.1.1. El tipo de datos de edad y de talla que se presenta en la Tabla 3.2.1.1 se denomina “*clave de talla/edad*” (este concepto se tratará más detenidamente en la Sección 3.3.5). Para cada una de estas cohortes es ahora posible determinar la edad media y la talla media, que se dan en la Tabla 3.2.1.2.

Si se supone que las seis cohortes de la Tabla 3.2.1.2 tienen los mismos parámetros de crecimiento, se pueden estimar los parámetros de crecimiento comunes. En otras palabras, es posible determinar los parámetros de crecimiento que producen la curva de crecimiento que mejor se ajusta a los pares de datos de edad media y talla media. En la Sección 3.3.4 se explica cómo hacerlo exactamente.

Téngase en cuenta que los datos presentados en la Tabla 3.2.1.1 son “hipotéticos” o “construidos”. En realidad se calcularon a partir de un conjunto de parámetros de crecimiento (que determinan las tallas medias de cada cohorte) y de un conjunto de desviaciones estándar para la distribución por tallas de cada cohorte. La ventaja de usar datos hipotéticos en este manual es que se conocen los parámetros verdaderos, lo que no ocurre con los datos tomados de una población real. Esto permite comparar los resultados de varios métodos de estimación de parámetros con los valores reales. Los datos presentados en las Tablas 3.2.1.1 y 3.2.1.2 se usarán también como ejemplos en las Secciones 3.4.1 y 3.4.2.

Ejemplo 4: Datos sobre composición por tallas/edades de múltiples cruceros de prospección

Suponga ahora que el crucero de prospección del Ejemplo 3 fuera sólo uno de una serie de 12 reconocimientos realizados durante los meses de enero, abril, julio y octubre de los años 1982 a 1984; en ese caso se obtendrían 12 tablas similares a la presentada en la Tabla 3.2.1.1. Si se toman muestras regulares de varias cohortes durante un período de tiempo, en este caso tres años, se pueden determinar las variaciones de la talla media representándolas gráficamente en relación con el momento del muestreo, como se puede ver en la Fig. 3.2.1.1. Con esta serie de datos podemos estimar por separado los parámetros de crecimiento de algunas de las cohortes. En el caso de la cohorte de primavera del año de reclutamiento 1982, por ejemplo, hay 10 pares de datos de edad y talla, que se pueden utilizar para estimar sus parámetros.

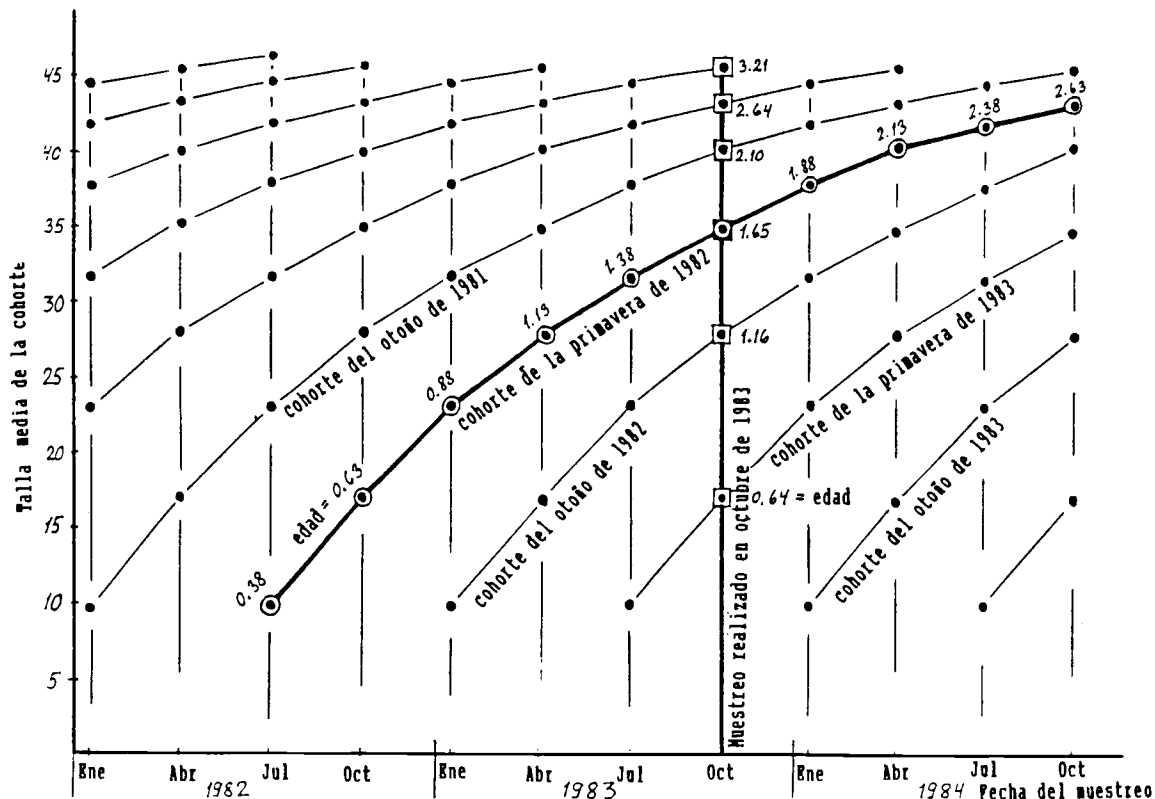


Fig. 3.2.1.1 Ejemplo de datos de talla/edad recolectados durante una serie de cruces de prospección (muestreos).

La diferencia entre seguir en el tiempo una cohorte en particular, como se hace aquí, y determinar las tallas medias de las diferentes cohortes en un momento dado, como se hizo en el Ejemplo 3, se ilustra en la Fig. 3.2.1.1, donde los dos diferentes tipos de datos se indican con líneas gruesas. La curva que comienza en julio de 1982 y sigue hasta octubre de 1984 muestra el crecimiento "real" de una cohorte. La línea vertical de la "muestra de octubre de 1983" representa una "sección transversal" del stock, en esa fecha.

En el caso de una especie de vida corta (de uno a dos años, por ejemplo), habría que seguir una cohorte en el tiempo, como se describe en el Ejemplo 4. El método basado en una sola muestra no sería aplicable, porque abarcaría sólo una o dos cohortes. Aunque puede haber diferencias en el crecimiento de las distintas cohortes, generalmente esta diferencia es tan pequeña que se puede pasar por alto. Por lo tanto, los datos que se presentan en la Fig. 3.2.1.1 se podrían reunir en un solo conjunto de datos y ser utilizado de forma parecida a los de la muestra de octubre de 1983 (Tabla 3.2.1.1).

Es probable que el sesgo sea menor si las muestras se obtienen periódicamente durante todo el año. Por lo tanto, aunque a veces se puede utilizar una sola muestra para determinar el crecimiento, es más seguro utilizar una serie de tiempo de registros.

(Véanse los **Ejercicios** en la Parte 2).

Ejemplo 5: Uso de las claves talla/edad

Una clave talla/edad equivale a una tabla que define, para cada categoría de tallas en un stock de peces particular, la distribución porcentual o fracción de frecuencias de edades que le corresponde,

como se puede ver en la Tabla 3.2.1.4. Una vez que esta clave está disponible, si se dispone únicamente de registros de la talla, los peces muestreados pueden ser distribuidos en grupos de edad utilizando dicha clave.

La clave talla/edad de la Tabla 3.2.1.4 se puede basar en 182 peces escogidos al azar, que posean la siguiente distribución de frecuencias de tallas:

Grupo de talla (cm)	5-10	10-15	15-20	20-25	Total
Frecuencia	110	40	22	10	182

El próximo paso es asignar edades a los peces de cada grupo de talla. Para ello es necesario suponer que los resultados son como los indicados en la Tabla 3.2.1.3. La Tabla 3.2.1.4 se obtendrá en forma simple, dividiendo cada fila de registros por la fila de totales para cada grupo de talla.

La Tabla 3.2.1.4, puede ser usada igualmente para asignar edades a una muestra de frecuencias de tallas mucho mayor, obtenida del mismo stock (para el cual la composición por edad es desconocida), como por ejemplo, utilizando la muestra de frecuencias de tallas correspondiente a 21041 peces, según se expone a continuación:

Grupo de talla (cm)	5-10	10-15	15-20	20-25	Total
Frecuencia	12088	7035	1788	130	21041

Al distribuir los números de cada grupo de talla en los grupos de edad, de acuerdo a las proporciones señaladas en la Tabla 3.2.1.4, se obtienen los resultados que se presentan en la Tabla 3.2.1.5. Por ejemplo, el grupo de talla entre 10 y 15 cm se estima que consiste de $7035 \cdot 0.25 = 1759$ peces del grupo 0 y $7035 \cdot 0.75 = 5276$ peces del grupo 1. Sumando la columna de registros, se llega finalmente a la composición por edad según se indica en la línea inferior de la Tabla 3.2.1.5.

Por lo tanto, para estimar la composición por edad en las capturas obtenidas en un stock en particular, sólo se necesita establecer una clave talla/edad, utilizando una muestra pequeña, a través de la cual se efectúa la lectura de edades, y luego se puede concentrar el esfuerzo en la obtención de muestras para la recopilación de datos sobre frecuencia de talla. Estas tallas serán convertidas a edades por medio de la clave. La misma clave puede ser usada en años consecutivos a no ser que se sospeche sobre la existencia de algún cambio en la composición de edades en el stock. Así, por ejemplo, en un período de notorio incremento en el esfuerzo, los peces viejos pueden desaparecer de las capturas, en cuyo caso se deberá preparar una nueva clave talla/edad.

TABLA 3.2.1.3
Datos de ingreso para la estimación de una clave talla/edad
(ejemplo hipotético)

grupo de talla cm	grupo de edad 0	grupo de edad 1	grupo de edad 2	total
5-10	110	0	0	110
10-15	10	30	0	40
15-20	0	11	11	22
20-25	0	1	9	10
total	120	42	20	182

TABLA 3.2.1.4
Clave hipotética talla/edad

grupo de talla cm	grupo de edad 0	grupo de edad 1	grupo de edad 2
5-10	1.0	0	0
10-15	0.25	0.75	0
15-20	0	0.5	0.5
20-25	0	0.1	0.9

TABLA 3.2.1.5
Composición por edades de una muestra grande de frecuencias de tallas estimada mediante la clave talla/edad de la Tabla 3.2.1.4

grupo de talla cm	total	grupo de edad 0	grupo de edad 1	grupo de edad 2
5-10	12088	0	0	12088
10-15	7035	1759	5276	0
15-20	1788	0	894	894
20-25	130	0	13	117
total	21041	13847	6183	1011

La Tabla 3.2.1.6 muestra la clave talla/edad para un pez tropical de larga vida, la caballa española (*Scomberomorus brasiliensis*). Para ilustrar las limitaciones de una clave de talla/edad, se considera la distribución porcentual por edad de los peces que miden entre 61 - 64 cm, cuyas edades fluctúan entre los 4-7 años. Ahora, si la mortalidad por pesca (esfuerzo) aumenta considerablemente, la mayoría de los peces de más de 5 años podrían ser exterminados y los escasos peces de 61 - 64 cm que podrían ser atrapados serían peces de 4 años, de crecimiento rápido, y algunos remanentes de 5 años de edad, mientras que los peces de 6 y 7 años de edad habrían desaparecido completamente. Si se usa la antigua clave en las nuevas distribuciones de frecuencias de tallas, dará la impresión de que los peces de 61 - 64 cm corresponden a edades entre 4 y 7 años y que domina el grupo de 5 años, cuando en realidad son sólo peces de 4 años de edad.

Al reunir muestras para una clave talla/edad, es importante incluir en las muestras especímenes muy pequeños y muy grandes. Si no, cuando se dispone de una muestra numerosa de mediciones de tallas para ser posteriormente distribuidas en grupos de edad, se descubrirá que algunos rangos de tamaño no se encuentran representados en la clave. Cuando los peces grandes y pequeños son representados deliberadamente en la clave, es importante recordar que dichos datos no pueden ser usados por sí solos para hacer estimaciones de los parámetros de crecimiento o mortalidad.

La metodología de la evaluación de stock de peces puede ser basada exclusivamente en las composiciones talla/edad. La aplicación de modelos matemáticos al crecimiento no es necesaria. Hasta un cierto grado, este es el caso de las evaluaciones hechas por el International Council for Exploration of the Sea, ICES (Consejo Internacional para la Exploración del Mar), en el Atlántico Norte. Sin embargo, como resulta difícil disponer de claves talla/edad confiables en la mayoría de las especies tropicales, en un futuro cercano, como también por otras razones que serán bosquejadas en

TABLA 3.2.1.6
Clave talla/edad para *Scomberomorus brasiliensis*, basada en lecturas de otolitos, en porcentajes
por grupos de tallas de 3 cm (Sturm, 1974)

grupo de tallas cm	grupos de edad (años)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13-16	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-
16-19	-	100	-	-	-	-	-	-	-	-
19-22	-	100	-	-	-	-	-	-	-	-
22-25	-	100	-	-	-	-	-	-	-	-
25-28	-	96	4	-	-	-	-	-	-	-
28-31	-	55	45	-	-	-	-	-	-	-
31-34	-	5	95	-	-	-	-	-	-	-
34-37	-	-	91	9	-	-	-	-	-	-
37-40	-	-	73	27	-	-	-	-	-	-
40-43	-	-	33	63	2	-	-	-	-	-
43-46	-	-	15	77	8	-	-	-	-	-
46-49	-	-	5	65	29	-	-	-	-	-
49-52	-	-	1	47	50	2	-	-	-	-
52-55	-	-	-	38	51	11	-	-	-	-
55-58	-	-	-	10	62	21	7	-	-	-
58-61	-	-	-	3	50	25	22	-	-	-
61-64	-	-	-	-	19	44	31	6	-	-
64-67	-	-	-	-	-	66	17	17	-	-
67-70	-	-	-	-	-	-	75	25	-	-
70-73	-	-	-	-	-	-	-	33	33	33
> 73	-	-	-	-	-	-	-	-	50	50

los siguientes capítulos, se le ha dado especial énfasis en este manual, a los modelos matemáticos del crecimiento.

3.2.2 Datos de la composición por tallas (sin la composición por edades)

Suponga que se tiene una serie de datos sobre frecuencias de tallas de cierta especie, pero sin que se disponga de lecturas de la edad. El conjunto de datos para un único muestreo se parecerá entonces a la columna de totales que es la última columna de la Tabla 3.2.1.1 o bien a la ilustración de la Fig. 3.2.2.1. ¿Es posible separar las distintas cohortes que constituyen esta muestra sin usar técnicas de determinación de la edad? La respuesta es que en ciertas condiciones sí es posible, excepto en aquellas partes en que las frecuencias de tallas de las diferentes cohortes se superponen demasiado.

El conjunto de datos hipotéticos presentados en la Tabla 3.2.1.1 fue creado a partir de una cantidad de componentes distribuidos normalmente, representando cada uno de ellos diferentes cohortes, como se muestra en la Fig. 3.2.2.2.

En la Fig. 3.2.2.1, la cohorte más joven, la correspondiente a la primavera de 1983, se puede distinguir fácilmente del resto de la muestra. La cohorte siguiente, que está más a la derecha, es algo más difícil de visualizar, mientras que las cuatro cohortes restantes sólo se pueden distinguir utilizando métodos más complejos que una simple inspección visual o incluso es posible que simplemente no se puedan separar.

En la Sección 3.4 se introducen algunos métodos que pueden ser utilizados para separar muestras de frecuencias de tallas en componentes distribuidos normalmente, suponiendo que éstas representan cohortes. Se demostrará, sobre la base del mismo conjunto de datos, que no es factible

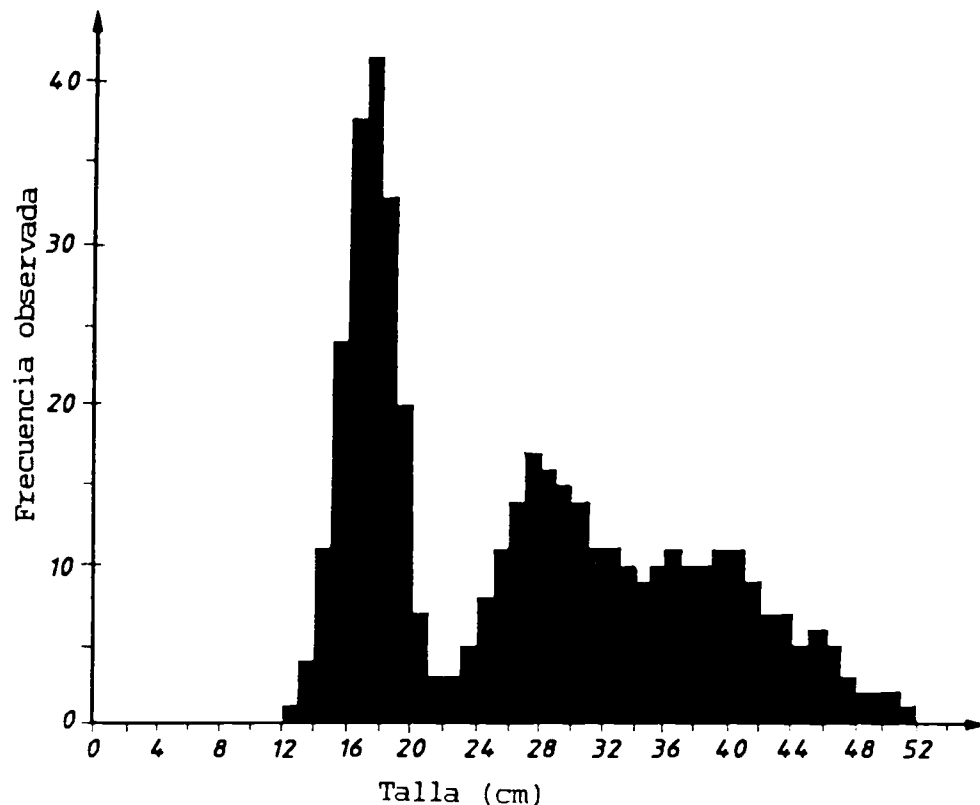


Fig. 3.2.2.1 Muestra de frecuencias de tallas, los únicos datos básicos que se pueden utilizar cuando no es posible la lectura de edad en estructuras duras (frecuencias de la “columna total” de la Tabla 3.2.1.1).

en la práctica separar más de tres o cuatro cohortes del conjunto total de datos. La sobreposición en la composición de tallas de las cohortes de los peces más grandes, que equivale a los peces más viejos, limita claramente el análisis. Por ende, las conclusiones que se pueden deducir de este conjunto de datos, comparadas con los casos en los cuales la edad de los peces puede ser determinada, son muy limitadas.

3.2.3 Datos obtenidos de capturas comerciales

Los datos para la estimación de los parámetros de crecimiento se pueden obtener también de muestras de capturas comerciales. Los principios básicos del análisis de muestras de desembarques comerciales son los mismos que los que se aplican a los datos provenientes de investigaciones. La principal diferencia está en los problemas de sesgo. Las embarcaciones comerciales nunca intentan tomar muestras al azar del stock, ya que siempre buscan los individuos de tamaño comercial y tratan de encontrar las zonas de mayores concentraciones. No obstante, si se tienen en cuenta las fuentes de sesgo y se procura estratificar la muestra para reducir al mínimo este problema, los datos obtenidos de muestras de la pesca comercial se pueden utilizar de forma parecida a la de los datos que proceden de cruceros de investigación.

La principal ventaja del muestreo de capturas comerciales es que resulta mucho más barato, por lo que se pueden tomar muestras con mucho mayor frecuencia que en el caso de los cruceros de investigación. En el Capítulo 7 se tratan más detalladamente los problemas relacionados con el muestreo de capturas comerciales.

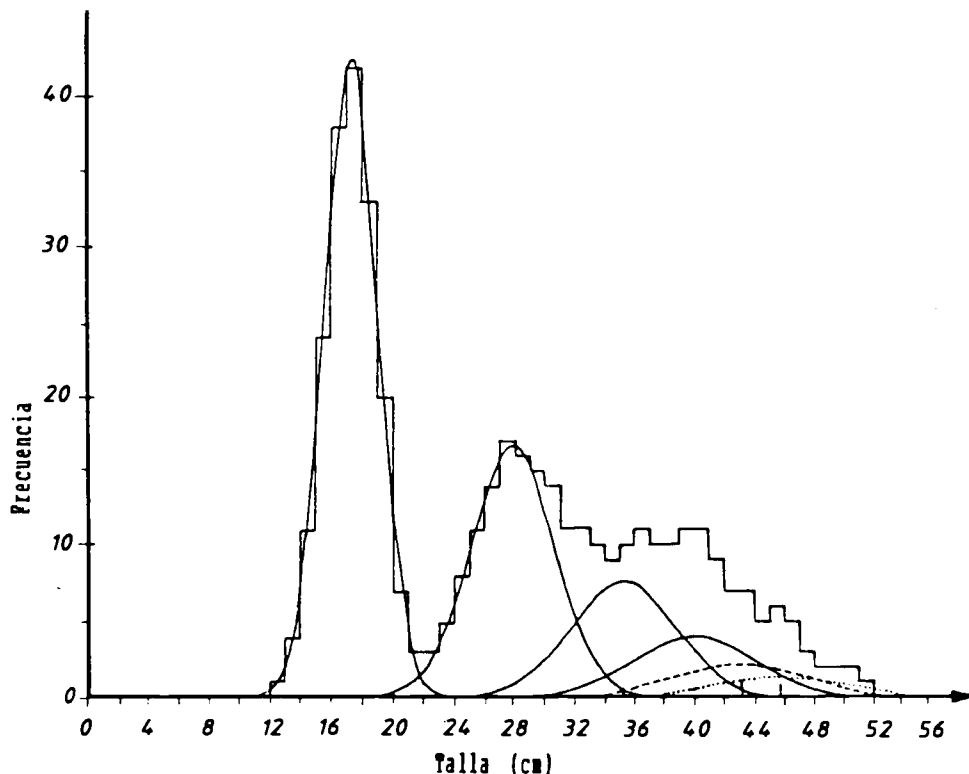


Fig. 3.2.2.2 La muestra de frecuencias de tallas de la Fig. 3.2.2.1, separada en componentes de distribución normal. (Frecuencias de la columna "total" de la Tabla 3.2.1.1). Este ejemplo también se usa para ilustrar el "método de Bhattacharya" descrito en la Sección 3.4.1 y el "método de máxima verosimilitud" que se explica en la Sección 3.5.3.

3.3 METODOS PARA LA ESTIMACION DE LOS PARAMETROS DE CRECIMIENTO A PARTIR DE DATOS DE TALLAS POR EDADES

En esta sección se supondrá que se cuenta con pares de observaciones de edad y talla, derivados ya sea de la lectura de los anillos de las partes duras o de los análisis de frecuencias de tallas (Secciones 3.4 y 3.5). Los datos de entrada pueden estar en la forma detallada de una composición por tallas/edades, como en la Tabla 3.2.1.1, o en forma procesada, como en la Tabla 3.2.1.2, y pueden derivar o no de una serie cronológica de muestras (véase la Fig. 3.2.1.1). A continuación, para simplificar, se usará el formato de datos de entrada que se ilustra en la Tabla 3.2.1.2.

Los parámetros de crecimiento se pueden derivar de esos datos mediante métodos gráficos, que siempre se basan en una conversión a una ecuación de tipo lineal, como se vio en el Capítulo 2. Estos gráficos llevan el nombre de los autores que los describieron por primera vez, a saber, Gulland y Holt (1959), Ford-Walford (1933 y 1946 respectivamente) y von Bertalanffy (1934). También examinaremos el "método de mínimos cuadrados" y el uso de las claves de talla/edad.

3.3.1 El gráfico de Gulland y Holt

El gráfico de Gulland y Holt (1959) se presentó en la Sección 3.1 con la Ec. 3.1.0.4, la cual igualmente puede ser escrita como:

$$\Delta L / \Delta t = K * L_{\infty} - K * \bar{L}(t) \quad (3.3.1.1)$$

En la Ec. 3.3.1.1 la longitud "L(t)" representa el recorrido de tallas desde L(t) a la edad t hasta L(t+Δt)

a la edad $t+\Delta t$. Así pues, la cantidad que hay que introducir en la Ec. 3.3.1.1 es la talla media (véase el ejemplo en la Tabla 3.1.0.1):

$$\bar{L}(t) = \frac{L(t+\Delta t)+L(t)}{2}$$

Sólo si Δt es pequeño, $\bar{L}(t)$ puede ser una aproximación razonable de la talla media. Sin embargo, Δt no necesita ser una constante, lo cual es una importante ventaja por sobre otros métodos.

Usando $\bar{L}(t)$ como la variable independiente y $\Delta L/\Delta t$ como la variable dependiente, la Ec. 3.3.1.1 se transforma en una regresión lineal:

$$\Delta L/\Delta t = a + b*\bar{L}(t)$$

Los parámetros de crecimiento K y L_∞ se obtienen de:

$$K = -b \quad \text{y} \quad L_\infty = -a/b$$

La Tabla 3.1.0.1 contiene un ejemplo de los datos de entrada (columnas C y D) y la Fig. 3.1.0.3 muestra el gráfico correspondiente. El incremento en longitud anual o el rango de crecimiento es graficado *vs* la talla media del año correspondiente. El análisis regresional da el siguiente resultado:

$$a = 22.40 \quad \text{y} \quad b = -0.3923$$

de lo que se obtiene:

$$K = -b = 0.39, \text{ es decir, } 0.4 \text{ por año,}$$

y

$$L_\infty = -a/b = 57.1 \text{ cm}$$

Ejemplo 6: Estimación de K y L_∞ con el gráfico de Gulland y Holt

Otro ejemplo del gráfico de Gulland y Holt se puede derivar de la Tabla 3.2.1.2, como se muestra en la Tabla 3.3.1.1. De las estimaciones del intercepto y de la pendiente, se tiene que:

$$K = -b = 0.77, \text{ o sea, } 0.8 \text{ por año,}$$

$$L_\infty = -a/b = -38.52/-0.7670 = 50.2 \text{ cm}$$

Los límites de confianza al 95% de K son los mismos que los de b , pero con el signo cambiado, es decir $[0.56, 0.98]$ (véase la Tabla 3.3.1.1). Los límites de confianza de L_∞ son más complicados de obtener. Sin embargo, se puede decir que para un valor determinado de K , el intervalo de confianza de L_∞ puede ser calculado a partir del intervalo de confianza de a . Si $K = 0.8$ y los límites de confianza de a son $[31.0/0.8, 46.0/0.8] = [38.7, 57.5]$. Estos no son los límites de confianza de L_∞ , sino sólo los límites condicionados a $K = 0.8$. (En realidad, los límites de confianza de una razón no están definidos, pero la teoría relativa a este aspecto sobrepasa el ámbito de este manual). La Fig. 3.3.1.1 muestra el gráfico de Gulland y Holt correspondiente a la Tabla 3.3.1.1.

En la Sección 3.1 se dijo que se puede demostrar matemáticamente que la Ec. 3.1.0.4: $\Delta L/\Delta t = K*(L_\infty - L(t))$ es equivalente a la ecuación de crecimiento de von Bertalanffy (Ec. 3.1.0.1):

$$L(t) = L_\infty*[1 - \exp(-K*(t-t_0))].$$

Sin embargo, esto sólo es correcto si el intervalo de tiempo Δt es infinitesimal. Por lo tanto, el gráfico de Gulland y Holt, basado en la Ec. 3.1.0.4, es una aproximación razonable sólo para valores pequeños de Δt .

(Véanse los **Ejercicios** en la Parte 2).

TABLA 3.3.1.1
Datos para efectuar el gráfico de Gulland y Holt y el análisis de regresión
(datos obtenidos de la Tabla 3.2.1.1)

t	Δt	$\bar{L}(t)$	L(t)	$\frac{\Delta L(t)}{\Delta t}$	$\frac{L(t+\Delta t)+\bar{L}(t)}{2} = \bar{L}(t)$
0.64		17.3			
	0.52		10.6	20.4	22.6
1.16		27.9			
	0.49		7.4	15.1	31.6
1.65		35.3			
	0.45		4.9	10.9	37.7
2.10		40.2			
	0.54		3.1	5.7	41.8
2.64		43.3			
	0.57		2.2	3.9	44.4
3.21		45.5			

b (pendiente) = -0.7670, a (intercepto) = 38.52, n = 5, $\bar{x} = 35.62$

$$sb^2 = \frac{1}{n-2} * [(sy/sx)^2 - b^2] = \frac{1}{3} * [(6.7727/8.7362)^2 - 0.7670^2] = 0.004216$$

$$sb = 0.06493, \quad t_{n-2} = 3.18, \quad sb * t_{n-2} = 0.2065$$

límites de confianza del 95% para b: [-0.974, -0.561] (véase Sección 2.4)

$$K = -b = 0.77 \pm 0.21$$

$$sa^2 = sb^2 * \left(\frac{n-1}{n} * sx^2 + \bar{x}^2 \right) = 0.004216 * \left(\frac{4}{5} * 8.7362^2 + 35.62^2 \right) = 5.607$$

$$sa = 2.368, \quad sa * t_{n-2} = 7.53$$

límites de confianza del 95% para a: [31.0, 46.0]

$$L_{\infty} = -a/b = -38.52/-0.7670 = 50.2 \text{ cm}$$

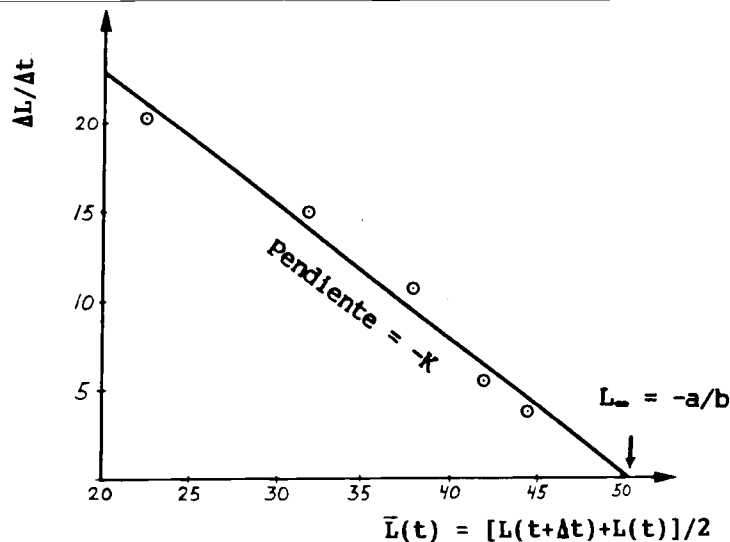


Fig. 3.3.1.1 Gráfico de Gulland y Holt correspondiente a la Tabla 3.3.1.1 (ejemplo hipotético). En el punto de intersección entre la línea de regresión y el eje X se obtiene el estimado de L_{∞} .

3.3.2 El gráfico de Ford-Walford y el método de Chapman

Este método introducido por Ford (1933) y Walford (1946) ha tenido amplia aplicación ya que el gráfico podía ser usado para efectuar una estimación rápida de L_{∞} , sin necesidad de hacer cálculos. En la actualidad casi no se utiliza este método, pero ha sido incorporado al manual en atención a que a menudo se le encuentra en documentos más antiguos.

De la ecuación de von Bertalanffy (Ec. 3.1.0.1) se desprende, luego de una serie de operaciones algebraicas, que:

$$L(t+\Delta t) = a + b \cdot L(t) \quad (3.3.2.1)$$

donde $a = L_{\infty} \cdot (1 - b)$ y $b = \exp(-K \cdot \Delta t)$

Ya que K y L_{∞} son constantes, a y b también se convierten en constantes si Δt es una constante. Los parámetros K y L_{∞} se obtienen con las fórmulas:

$$K = -\frac{1}{\Delta t} \cdot \ln b \quad \text{y} \quad L_{\infty} = \frac{a}{1-b}$$

Para ilustrar el uso de la Ec. 3.3.2.1 considere la Tabla 3.3.2.1, donde las cifras de la columna A representan las tallas, $L(t)$, para una serie de edades con un intervalo de tiempo constante de un año, mientras que la columna B contiene las tallas, $L(t+\Delta t)$, que equivale a la talla un año después.

Al hacer el análisis de regresión se obtiene:

$$a = 18.70 \quad \text{y} \quad b = 0.6725$$

de los cuales se obtiene:

$$K = -(1/1) \cdot \ln 0.6725 = 0.3968, \text{ digamos } 0.4 \text{ por año y}$$

$$L_{\infty} = 18.70 / (1 - 0.6725) = 57.1 \text{ cm}$$

El gráfico de Ford-Walford actual, correspondiente a estos datos se muestra en la Fig. 3.3.2.1. Ahora, L_{∞} puede ser estimado gráficamente por la intersección de la línea de regresión con la diagonal de

TABLA 3.3.2.1
Pares de tallas consecutivas, con $\Delta t = 1$ año, obtenidas de la Tabla 3.1.0.1. A y B: datos para dibujar el gráfico de Ford-Walford (véase la Fig. 3.3.2.1). A y C: datos para emplear el método de Chapman (véase la Fig. 3.3.2.2)

	A	B	C
t	L(t) (x)	L(t+ Δt) (y)	L(t+ Δt)-L(t) (y)
1	25.7	36.0	10.3
2	36.0	42.9	6.9
3	42.9	47.5	4.6
4	47.5	50.7	3.2
5	50.7	52.8	2.1
6	52.8	54.2	1.4

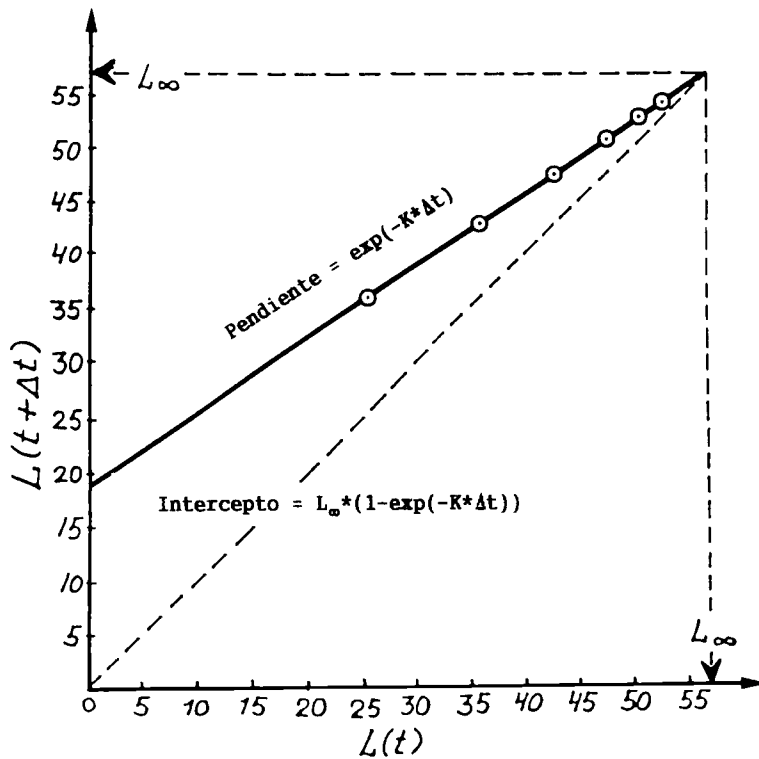


Fig. 3.3.2.1 Gráfico de Ford-Walford. Se utilizan los valores de las columnas A y B de la Tabla 3.3.2.1.

45°, donde $L(t) = L(t+\Delta t)$, debido a que para los peces muy viejos, que ya no crecen, se tiene que $L_\infty = L(t) = L(t+\Delta t)$.

También el método descrito por Chapman (1961) y posteriormente por Gulland (1969) está basado en un intervalo de tiempo constante Δt , lo que significa que este método es aplicable si se tienen observaciones en pares:

$$(t, L(t)), (t+\Delta t, L(t+\Delta t)), (t+2\Delta t, L(t+2\Delta t)), \text{ etc.}$$

Se puede demostrar que la ecuación de crecimiento de von Bertalanffy (Ec. 3.1.0.1) implica que:

$$L(t+\Delta t) - L(t) = c \cdot L_\infty - c \cdot L(t) \quad (3.3.2.2)$$

donde $c = 1 - \exp(-K \cdot \Delta t)$

Sin embargo, ya que K y L_∞ son constantes, y si Δt permanece constante, c permanecerá constante a su vez y, en consecuencia, la Ec. 3.3.2.2 se transforma en una regresión lineal:

$$y = a + b \cdot x$$

donde:

$$y = L(t+\Delta t) - L(t), \quad a = c \cdot L_\infty, \quad b = -c \quad \text{y} \quad x = L(t)$$

Nótese que la pendiente es negativa y, también, que en la abscisa (eje x) se usó la talla más pequeña, en lugar del valor medio (véase la Sección 3.3.1).

Los parámetros de crecimiento se obtienen de:

$$K = -(1/\Delta t) * \ln(1+b) \quad \text{y} \quad L_{\infty} = -a/b \quad \text{ó} \quad a/c$$

Para ilustrar el uso de la Ec. 3.3.2.2 considere nuevamente la Tabla 3.3.2.1, donde $L(t) = x$ en la columna A y $L(t+1) - L(t) = y$, en la columna C. El análisis de regresión entrega los siguientes resultados:

$$a = 18.70 \quad \text{y} \quad b = -0.3275 \quad \text{y, por lo tanto,} \quad c = 0.3275$$

$$K = -(1/1) * \ln(1 - 0.3275) = 0.3968, \quad \text{o sea} \quad 0.4 \quad \text{por año}$$

$$L_{\infty} = 18.70/0.3275 = 57.1 \quad \text{cm}$$

El gráfico correspondiente se entrega en la Fig. 3.3.2.2.

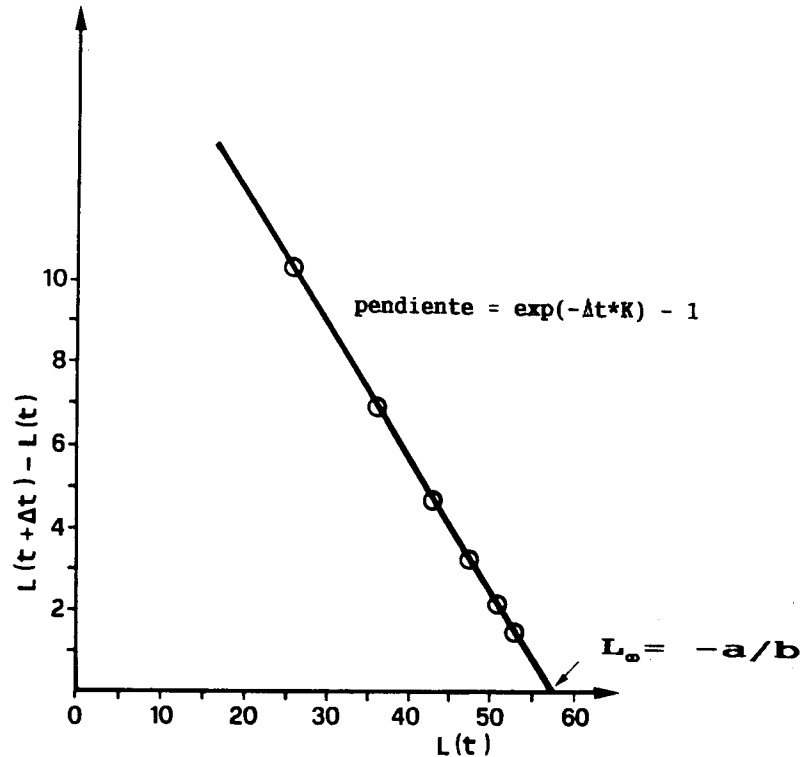


Fig. 3.3.2.2 Gráfico de Chapman. Se utiliza la información de las columnas A y C de la Tabla 3.3.2.1.

Los tres métodos descritos en las Secciones 3.3.1 y 3.3.2 dan aproximadamente los mismos resultados al aplicarlos a los datos de la Tabla 3.1.0.1. Esto se debe al hecho de que los datos corresponden exactamente a la ecuación de von Bertalanffy, ya que se obtuvieron de la misma ecuación mediante un cálculo retrogresivo (hacia atrás). Con datos reales se debe esperar cierta diferencia en los resultados.

Los tres métodos descritos anteriormente se pueden usar para calcular K y L_{∞} . Un cuarto método, el gráfico de von Bertalanffy se puede emplear para obtener una estimación de K y t_0 . Sin embargo, este método requiere de una estimación de L_{∞} como dato de entrada (véase la Sección 3.3.3).

La estimación de L_{∞} también se puede hacer mediante el "método de Powell-Wetherall". Pero, debido a que este método también permite hacer un cálculo del coeficiente de mortalidad total, Z , será presentado posteriormente en la Sección 4.5.4.

(Véanse los **Ejercicios** en la Parte 2).

3.3.3 El gráfico de von Bertalanffy

El primer método para estimar los parámetros de crecimiento de von Bertalanffy fue propuesto por su autor en 1934. Se puede usar para estimar K y t_0 a partir de los datos de edad/talla, y requiere una estimación de L_∞ como entrada.

La ecuación de crecimiento (Ec. 3.1.0.1) se puede expresar también como:

$$-\ln(1 - L(t)/L_\infty) = -K*t_0 + K*t \quad (3.3.3.1)$$

Con la edad, t , como variable independiente (x) y el lado izquierdo como variable dependiente (y), la ecuación define una regresión lineal, en que K representa la pendiente y el intercepto es $a = -K*t_0$.

Ejemplo 7: Estimación de K y t_0 mediante el gráfico de von Bertalanffy

La Tabla 3.3.3.1 muestra cómo calcular los datos de entrada para el gráfico de von Bertalanffy a partir de los valores listados en la Tabla 3.3.1.1, con $L_\infty = 50$ cm. El gráfico aparece en la Fig. 3.3.3.1. Compare

TABLA 3.3.3.1
Datos de entrada y resultados de la regresión de los
datos presentados en el gráfico de von Bertalanffy
(datos derivados de la Tabla 3.3.1.1, $L_\infty = 50$ cm)

t (x)	$L(t)$	$-\ln(1 - L(t)/L_\infty)$ (y)
0.64	17.3	0.425
1.16	27.9	0.816
1.65	35.3	1.224
2.10	40.2	1.630
2.64	43.3	2.010
3.21	45.5	2.408

$a = -0.0680$ $b = 0.7825$
 $K = b = 0.78$ por año
 $t_0 = -a/b = 0.087$ años

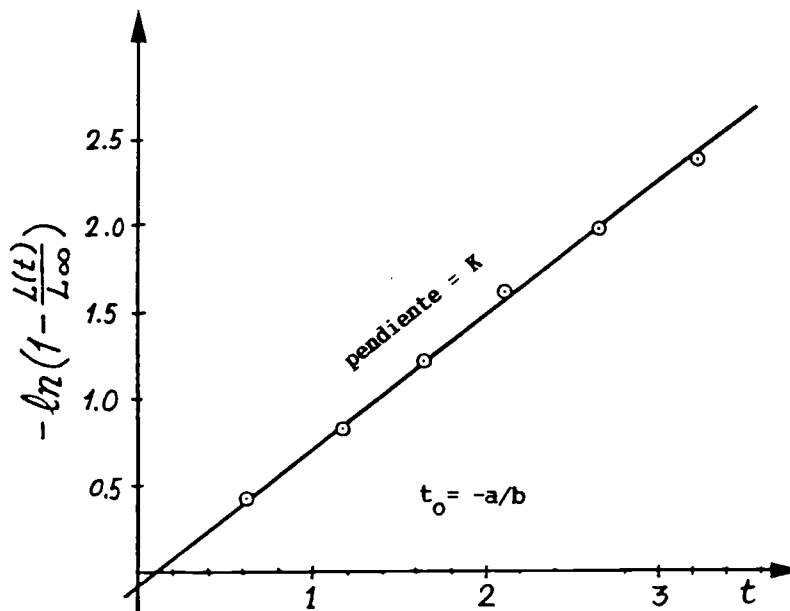


Fig. 3.3.3.1 Gráfico de Von Bertalanffy al utilizar la información de la Tabla 3.3.3.1.

el valor de K (0.78 por año) con el estimado ($K = 0.77 \pm 0.21$), obtenido con el gráfico de Gulland y Holt para los mismos datos.

El gráfico de von Bertalanffy es un método más seguro que el de Gulland y Holt (y el de Ford-Walford), en el sentido de que casi siempre da una estimación razonable de K , a condición de que se use una estimación razonable de L_∞ en los cálculos (como se ilustra en el Ejercicio 3.3.3). Hay que verificar, sin embargo, que el gráfico (Fig. 3.3.3.1) “parezca” lineal. Por otro lado, se puede señalar que el gráfico de Gulland y Holt es más poderoso, pues saca a relucir mejor los casos en que las observaciones no se ajustan al modelo de von Bertalanffy.

Recordando la interpretación de L_∞ como la talla media de un pez muy viejo, existen varios métodos simplificados para estimar L_∞ mediante el gráfico de von Bertalanffy:

- 1) En muestras pequeñas se puede usar simplemente el pez más grande.
- 2) En una muestra muy grande se puede tomar el promedio de las tallas de, por ejemplo, los diez ejemplares más grandes.
- 3) Tal vez la mejor manera de estimar L_∞ sea el método de Powell-Wetherall, que se describe en la Sección 4.5.4.

Tal vez no importe tanto el definir cuál estimación de L_∞ se va a utilizar. Así, si se sobreestima L_∞ , K queda subestimado y ambos se compensan, de manera que la curva de crecimiento resultante sigue siendo casi la misma para el recorrido de edades representado en el conjunto de datos. (Este aspecto se examinará en forma detallada en la Sección 3.4). No obstante, existe un problema en el uso del gráfico de von Bertalanffy en relación con la definición de L_∞ . El argumento del logaritmo en la Ec. 3.3.3.1 ($1 - L(t)/L_\infty$) debe ser positivo, ya que de otra manera el logaritmo no quedaría definido.

Así pues, el gráfico de von Bertalanffy no puede aceptar una talla mayor que L_∞ , mientras que con la definición de L_∞ dada en la Sección 3.1.4 bien puede suceder que para el pez más viejo $L(t) > L_\infty$, debido a que las observaciones $(t, L(t))$ fluctúan aleatoriamente alrededor de la línea. El gráfico de von Bertalanffy emplea de hecho la “ecuación inversa de von Bertalanffy”:

$$t(L) = t_0 - \frac{1}{K} \ln(1 - L/L_\infty) \quad (3.3.3.2)$$

que es la Ec. 3.1.0.1 resuelta para t . Puede que sea necesario omitir los peces más viejos para obtener que $1 - L/L_\infty > 0$.

El concepto de L_∞ que se aplica en el gráfico de von Bertalanffy es diferente del gráfico de Gulland y Holt, por las mismas razones por las que los parámetros de la “regresión lineal inversa” difieren de los de la “regresión lineal original”.

(Véanse los **Ejercicios** en la Parte 2).

3.3.4 El método de mínimos cuadrados

Desde el punto de vista teórico de la estimación, este método se considera superior a los que se expusieron en las secciones precedentes. Es el paralelo no lineal del análisis de regresión lineal presentado en la Sección 2.4. Sin embargo, la cantidad de cálculos que exige es considerable, y en la práctica se necesita un computador para realizarlos.

Suponga que disponemos de una serie de pares de observaciones (talla, edad). Estas se pueden haber obtenido mediante la determinación de la edad (véase la Sección 3.2.1) o derivado de un análisis de progresión modal (que se tratará en la Sección 3.4.2.). Sea n el número de observaciones:

$$(L(i), t(i)) = (\text{talla del pez } N^{\circ}i, \text{ edad del pez } N^{\circ}i)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$.

El método calcula los parámetros de crecimiento de tal manera que la suma de los cuadrados

de las desviaciones entre el modelo y las observaciones se reduce al mínimo, es decir, la suma disminuye con respecto a los parámetros L_{∞} , K y t_0 :

$$\sum_{i=1}^n [L(i) - L_{\infty} * [1 - \exp(-K * (t(i) - t_0))]]^2 \quad (3.3.4.1)$$

Programas de computación

El paquete computacional LFSA para la evaluación de poblaciones de peces (Sparre, 1987) contiene el programa "VONBER", que puede estimar los parámetros de crecimiento por mínimos cuadrados. El método usado por este programa es más bien complicado y una explicación detallada caería fuera del ámbito de este manual. No obstante, conceptualmente el análisis de regresión no lineal no es más complicado que la regresión lineal, de la misma manera que la raíz cuadrada de 3 no es conceptualmente más compleja que la raíz cuadrada de 4, si bien ésta última es mucho más fácil de calcular. FiSAT también contiene este programa. Hay igualmente otros programas de computación parecidos (véase el Capítulo 15).

3.4 ESTIMACION DE LA COMPOSICION POR EDADES A PARTIR DE LAS FRECUENCIAS DE TALLAS

En la sección 3.3 se han tratado los métodos para calcular los parámetros de crecimiento de la ecuación de crecimiento de von Bertalanffy. Todos estos métodos requieren disponer de datos de tallas y edad como entrada. Como ya se ha afirmado, es muy difícil determinar la edad en los peces tropicales, por lo tanto, en la mayoría de los casos, sólo estarán disponibles los datos de frecuencias de tallas. Esta sección trata sobre el análisis de datos de frecuencias de tallas. El objetivo de los métodos, que aquí se describen, es asignar edades a ciertos grupos de tallas. En otras palabras, el objetivo es separar una distribución de frecuencias de tallas compleja, en cohortes y, a la vez, asignar una edad arbitraria a cada una de estas cohortes. Ya que la talla media de cada cohorte también se puede determinar, se habrá obtenido la combinación de datos talla-edad que es necesaria para determinar los parámetros de crecimiento, utilizando los métodos descritos en la Sección 3.3. Antes de considerar métodos específicos, se ilustrarán las dificultades que involucra esta clase de análisis, utilizando para ello un ejemplo para especies tropicales, después de una breve introducción que relata la primera aplicación conocida de estos métodos en Dinamarca.

Ejemplo 8: Cálculo de la edad en especies de aguas templadas

La idea básica en que se fundamentan las técnicas que se describen en esta sección se remonta a uno de los primeros trabajos realizados en biología pesquera, que corresponde a un artículo de Petersen (1892) sobre el blenio vivíparo (*Zoarces viviparus*). En este, las medidas de longitud de 156 peces están representadas por puntos en la Fig. 3.4.0.1. Petersen dividió los 156 peces en juveniles, machos y hembras y además dividió los peces adultos en dos grupos de tamaño:

medianos : de 5 a 8 pulgadas
grandes : de 9 pulgadas o más.

Por observaciones anteriores, Petersen sabía que en invierno se podían capturar juveniles de aproximadamente 1.5", mientras que en verano todos los juveniles medirían de 3" a 5". Debido a que, según la estación, ciertos grupos de tallas parecían estar ausentes, concluyó que los tres grupos de tallas de la muestra de julio se debían interpretar como sigue:

menos de 5" : grupo 0 , nacido en invierno de 1889/90
de 5" a 8" : grupo 1 , nacido en invierno de 1888/89
de 9" y más : grupo 2+, nacido en invierno de 1887/88 o antes

(El símbolo "a+" representa al grupo "a" más los grupos mayores. Lo llamaremos "grupo a más").

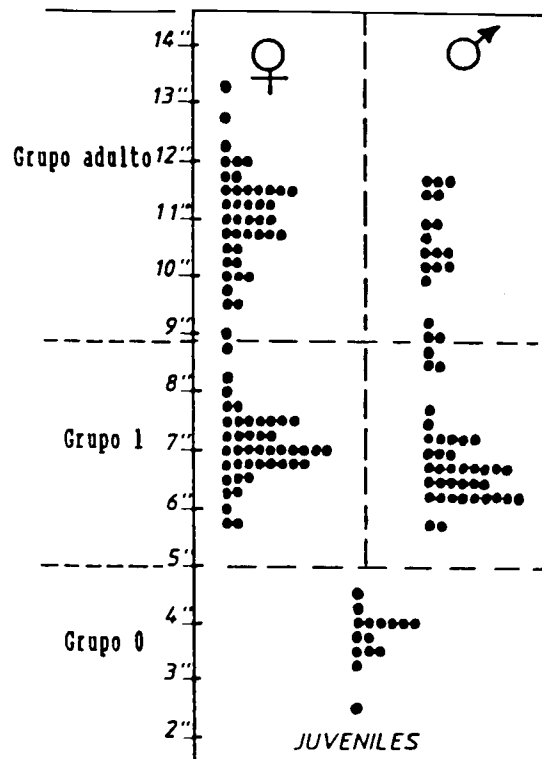


Fig. 3.4.0.1 Muestra de frecuencias de tallas de 156 ejemplares de *Zoarces viviparus*, en unidades de pulgadas danesas. Muestras recolectadas en el fiordo Holbaek (Dinamarca) 10-11 de Julio de 1890 (Redibujado de Petersen, 1892).

Los descubrimientos de Petersen indicaron que *Zoarces viviparus* se reproduce una vez por año durante un período muy restringido. Para la mayoría de las especies templadas, el desove ocurre durante 2-4 meses en invierno o primavera.

Este patrón de reproducción hace que sea relativamente fácil definir una cohorte. En aguas templadas la cohorte corresponde simplemente a una clase anual de peces. Dado que todos los peces crecen aproximadamente al mismo ritmo, se puede seguir a una cohorte durante la primera parte de su vida trazando los máximos de las muestras de frecuencias de tallas. Pero cuando se acercan a su tamaño máximo esto ya no es posible, debido a que otros peces de edades diferentes habrán alcanzado casi la misma talla.

Ejemplo 9: Cálculo de la edad en *Plectropomus leopardus*, una especie tropical

Se efectuará ahora un análisis similar, pero con una especie tropical. La Fig. 3.4.0.2(a) presenta las frecuencias de tallas de una muestra correspondiente a una especie tropical, el *Plectropomus leopardus*, obtenida por Goeden (1978) de la Isla Heron, Australia. Este ejemplo parece fácil de tratar. Existen cuatro máximos bien definidos (A, B, C y D) y resulta tentador interpretarlos como los grupos de edad 2, 3, 4 y 5 ó, como lo hizo Goeden, los grupos de edad 1, 2, 3 y 4 (así se representan en la Fig. 3.4.0.2). No obstante, un examen más minucioso revela que ninguna de las interpretaciones se ajusta al modelo de von Bertalanffy. Las tallas medias de los máximos B, C y D se sitúan en alrededor de 35, 42 y 50 cm, respectivamente. Si las interpretamos como grupos de edad, las tasas de crecimiento serán:

$$\text{entre B y C: } (42-35)/1 = 7 \text{ cm/año}$$

$$\text{entre C y D: } (50-42)/1 = 8 \text{ cm/año}$$

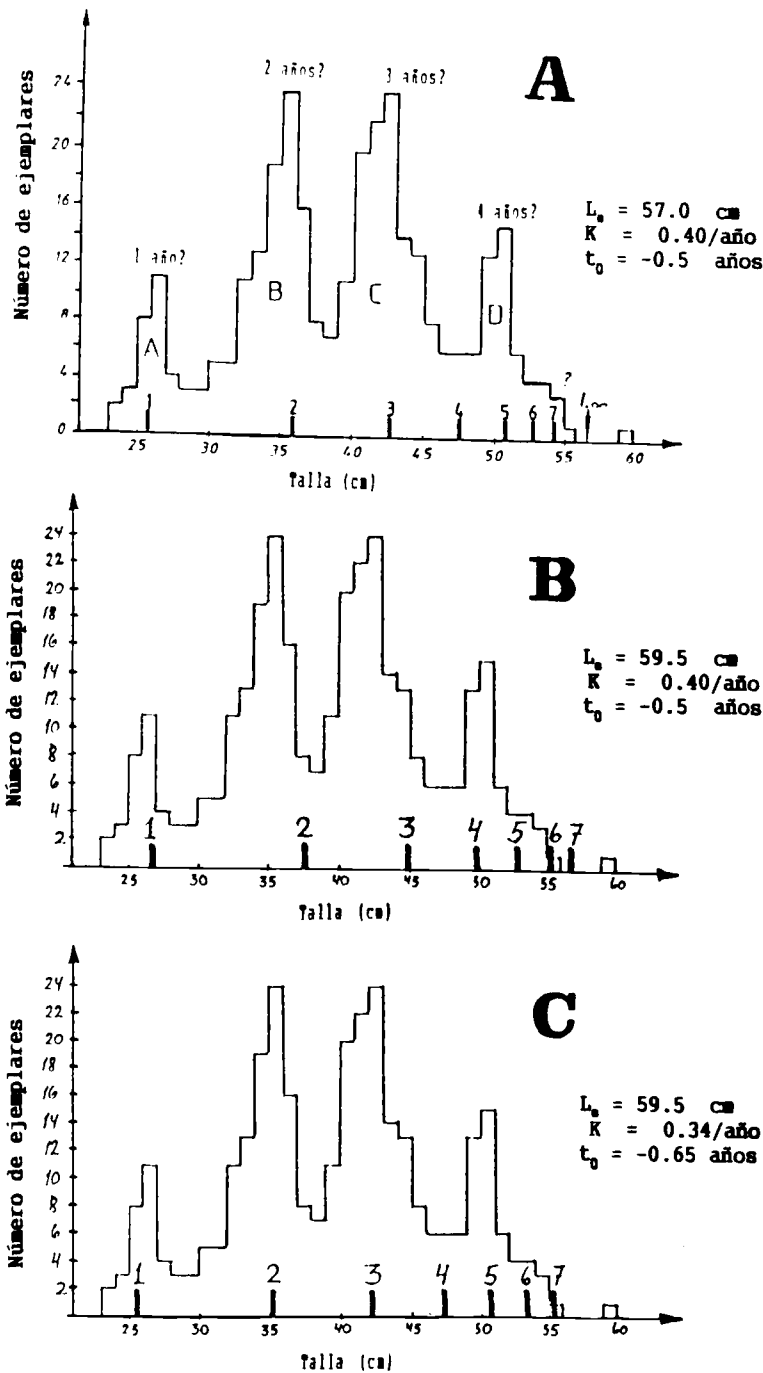


Fig. 3.4.0.2 Muestra de frecuencias de tallas de *Plectropomus leopardus* (Goeden, 1978). Las barras pequeñas, sobre el eje x indican la talla a la edad correspondiente, de acuerdo a los parámetros de crecimiento que se indican en las columnas a, b y c de la Tabla 3.4.0.1.

Nota: El Sr. H. Weng, de Brisbane, Australia, ha llamado nuestra atención respecto a que *Plectropomus leopardus* cambia de sexo, de macho a hembra, cuando los individuos alcanzan tallas de 30 a 35 cm. Esta situación también fue mencionada por Goeden (1978); no obstante, intencionalmente no se consideró el cambio de sexo para desarrollar el ejemplo. Aunque los resultados obtenidos no son "reales", los datos sirven igualmente para ilustrar el método.

Esto no se ajusta a la curva de crecimiento de von Bertalanffy, ya que se prevé una tasa de crecimiento menor entre C y D que entre B y C. Por lo tanto, para que la interpretación esté de acuerdo con el modelo de von Bertalanffy hay que asignar al máximo D dos años más de edad que al máximo C y suponer que existe otro grupo de edad entre C y D. Una explicación probable es que los máximos C y D representan clases anuales fuertes (de cohortes numerosas), mientras que la cohorte correspondiente a los grupos de tallas entre los máximos C y D proviene de una clase anual débil.

Las barras negras pequeñas del eje de tallas de la Fig. 3.4.0.2(a) son las tallas a las edades 1, 2, ..., 7 años, correspondientes a la curva de crecimiento de von Bertalanffy, con los parámetros:

$$L_{\infty} = 57 \text{ cm}, K = 0.4 \text{ por año y } t_0 = -0.5 \text{ años}$$

Las tallas correspondientes a las barras se dieron en la Tabla 3.1.0.1. Estos parámetros interpretan los máximos A, B, C y D como los grupos 1, 2, 3 y 5 respectivamente, y sitúan al grupo 4 entre los máximos C y D. La elección de estos parámetros de crecimiento en particular no se basa en ninguna técnica de ajuste u otro método racional. Se derivaron de una breve serie de ensayos con diferentes parámetros hasta obtener la curva que situó las tallas medias de la cohorte (más o menos) donde están los máximos, excepto para el grupo de edad 4.

Obviamente, éste no es el único conjunto de parámetros de crecimiento que produce cierta correspondencia con los máximos de la Fig. 3.4.0.2(a). Por ejemplo, se podría haber usado la talla más grande, 59.5 cm, como estimación de L_{∞} . Nótese que si la definición de L_{∞} es la talla media de un pez muy viejo, en general no será correcto usar la talla del pez más grande observado como estimación de L_{∞} . Sin embargo, en este caso, con sólo 312 peces en la muestra, el ejemplar más grande puede dar una estimación razonable de L_{∞} . Utilizando este L_{∞} junto con los valores 0.4 para K y 0.5 para t_0 se obtienen las tallas a la edad que se consignan en la columna b de la Tabla 3.4.0.1. La Fig. 3.4.0.2(b) presenta las correspondientes tallas medias a la edad junto con la muestra de frecuencias de tallas. Obviamente, la elección de estos parámetros de crecimiento produce un ajuste con respecto a los máximos menos convincente que el que aparece en la Fig. 3.4.0.2(a).

Reduciendo K a 0.34 y t_0 a -0.65 se obtiene un mejor ajuste entre máximos y tallas medias, como se puede ver en la Fig. 3.4.0.2(c). Las correspondientes tallas medias a la edad aparecen en la columna c de la Tabla 3.4.0.1. Mediante inspección visual únicamente es difícil valorar si este ajuste es mejor que el que se presenta en la Fig. 3.4.0.2(a).

TABLA 3.4.0.1
Opciones talla-edad, para elegir los parámetros de crecimiento. Los gráficos con las frecuencias observadas se muestran en la Fig. 3.4.0.2, columnas a, b y c

		a *)	b	c	d
edad	L_{∞}	57.00	59.50	59.50	70.00
(años)	K	0.40	0.40	0.34	0.21
	t_0	-0.50	-0.50	-0.65	-1.15
0		10.3	10.8	11.8	15.1
1		25.7	26.8	25.5	25.5
2		36.0	37.6	35.3	33.9
3		42.9	44.8	42.3	40.8
4		47.5	49.7	47.3	46.3
5		50.7	52.9	50.8	50.8
6		52.8	55.1	53.3	54.5
7		54.2	56.5	55.1	57.4

*) véase la Tabla 3.1.0.1

En general, es difícil definir una solución única para este tipo de problema. Los diferentes valores (de L_{∞} , K , t_0) pueden producir curvas de crecimiento muy similares. Esto resulta evidente cuando se observa que para un valor dado de L_{∞} siempre se pueden determinar K y t_0 de tal manera que la curva pase a través de dos puntos previamente especificados del sistema de coordenadas de talla/edad.

A título de ejemplo, si se asigna a L_{∞} el valor de 70 cm y se determina K y t_0 de manera que la curva así obtenida se aproxime a la curva, dada en la columna c de la Tabla 3.4.0.1. Para ello debemos seleccionar K y t_0 de modo que las tallas a la edad $t = 1$, sean, $L(1) = 25.5$ cm y $L(5) = 50.8$ cm.

Fórmulas para calcular K y t_0 se pueden derivar de la Ec. 3.3.3.1, según:

$$-\ln\left(1 - \frac{L(t_1)}{L_{\infty}}\right) = -K*t_0 + K*t_1 \quad (a)$$

$$-\ln\left(1 - \frac{L(t_2)}{L_{\infty}}\right) = -K*t_0 + K*t_2 \quad (b)$$

Substrayendo (b) de (a) y dado que $\ln a - \ln b = \ln a/b$, al reorganizar los términos se llega a:

$$\ln \frac{L_{\infty}-L(t_1)}{L_{\infty}-L(t_2)} = K*(t_2-t_1)$$

ó

$$K = \frac{1}{t_2-t_1} * \ln \frac{L_{\infty}-L(t_1)}{L_{\infty}-L(t_2)} \quad (3.4.0.1)$$

La fórmula para t_0 es obtenida simplemente reorganizando la Ec. 3.3.3.1. En el caso de $t = t_1$, se tiene:

$$t_0 = t_1 + \frac{1}{K} * \ln\left(1 - \frac{L(t_1)}{L_{\infty}}\right) \quad (3.4.0.2)$$

Por lo tanto, para $t_1 = 1$ y $t_2 = 5$, correspondiendo respectivamente a $L(1)$ y $L(5)$, se tiene que:

$$K = \frac{1}{5-1} * \ln \frac{70.0-25.5}{70.0-50.8} = 0.21 \text{ por año}$$

y

$$t_0 = 1 + \frac{1}{0.21} * \ln\left(1 - \frac{25.5}{70.0}\right) = -1.15 \text{ años}$$

Con estos parámetros de crecimiento se obtienen las tallas a la edad que se consignan en la columna d de la Tabla 3.4.0.1. Las dos curvas se ilustran en la Fig. 3.4.0.3. Como se puede ver, es difícil decidir con cuál de las dos curvas se logra el mejor ajuste respecto a la muestra de frecuencias de tallas de la Fig. 3.4.0.2.

A menudo resulta extremadamente difícil obtener una interpretación que no sea ambigua cuando se analiza un conjunto de datos de frecuencias de tallas en peces tropicales, particularmente cuando se dispone de una única muestra compleja en vez de una serie de tiempo de frecuencias de tallas (véase Venema *et al.*, 1988). El contar con información adicional sobre la biología de la especie en estudio puede ayudar notoriamente a interpretar correctamente los datos.

La interrelación entre L_{∞} , K y t_0 se muestra en la Fig. 3.4.0.4, en la que también se observa K y t_0 en función de L_{∞} para las curvas de crecimiento que cumplen la condición $L(1) = 25.5$ cm y $L(5) = 50.8$ cm. Obsérvese que K y t_0 disminuyen a medida que L_{∞} aumenta. Así, cuando se comparan diferentes estimaciones de K , L_{∞} y t_0 , dicho proceso no se debe hacer entre parámetros individuales,

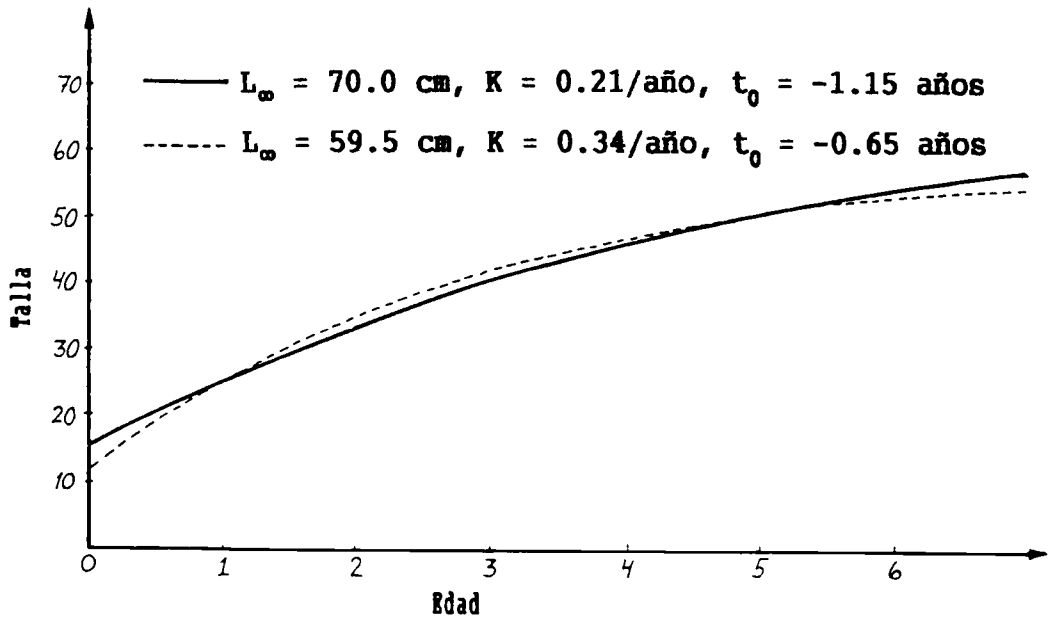


Fig. 3.4.0.3 Ejemplo de dos curvas de crecimiento aproximadamente iguales, pero que tienen parámetros de crecimiento muy diferentes. Derivadas de las columnas c y d de la Tabla 3.4.0.1.

sino entre las curvas de crecimiento resultantes. En el ejemplo de las columnas c y d de la Tabla 3.4.0.1 se podría decir que las dos series de parámetros

$$(L_{\infty}, K, t_0) = (59.5, 0.34, -0.65)$$

y

$$(L_{\infty}, K, t_0) = (70.0, 0.21, -1.15)$$

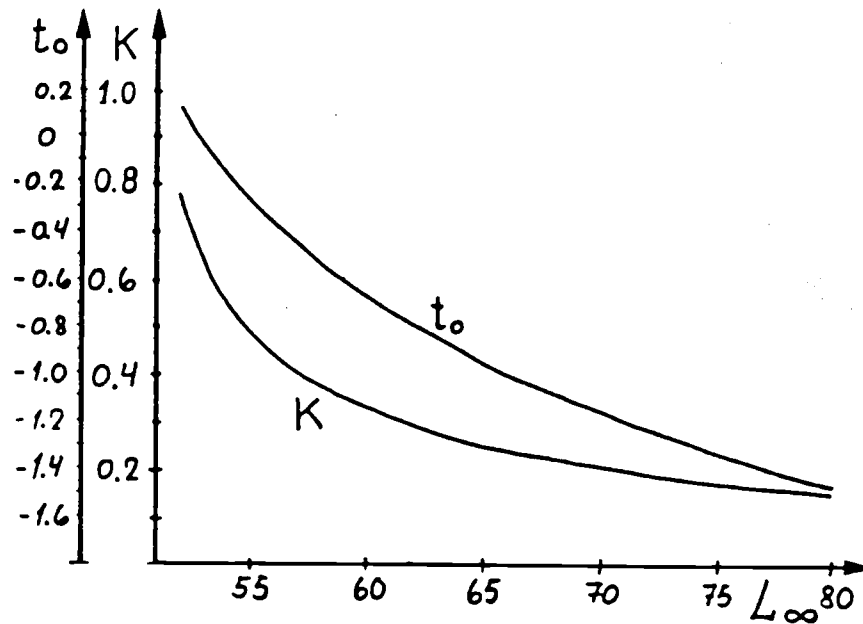


Fig. 3.4.0.4 Parámetros de crecimiento K y t_0 como una función de L_{∞} en curvas de crecimiento que cumplen la condición $L(1) = 25.5$ cm y $L(5) = 50.8$ cm.

son aproximadamente iguales en el sentido de que producen casi las mismas curvas de crecimiento dentro de la serie de edades abarcada. Cuantos más peces viejos haya en la muestra, mejor será la estimación de L_{∞} , y la estimación de K se volverá menos dependiente de la de L_{∞} .

Este análisis contiene una advertencia: las estimaciones de los parámetros de crecimiento no siempre se relacionan con la fisiología del pez. Sólo cuando la muestra es grande e insesgada se puede considerar que los parámetros estimados reflejan su interpretación fisiológica.

Comparación de las curvas de crecimiento

El parámetro de crecimiento K se relaciona con la tasa metabólica del pez. A menudo las especies pelágicas son más activas que las especies demersales y poseen valores del parámetro K más alto. Así también, la tasa metabólica igualmente tiene relación con la temperatura: los peces tropicales poseen valores de K más altos que los peces de aguas frías. Sin embargo, estas relaciones se ven oscurecidas por la correlación existente entre K y L_{∞} , dado que a un mismo nivel de actividad las especies pequeñas poseen valores de K más altos que las especies grandes. Otra complicación resulta de la correlación estadística existente entre K y L_{∞} , como se describió anteriormente: diferentes combinaciones de K y L_{∞} pueden dar prácticamente el mismo ajuste de los datos, excepto cuando se dispone de un amplio rango de edades. Una vez más, un valor alto de K se combina con un bajo valor de L_{∞} y *vice versa*. Estos dos tipos de correlación se confunden en la literatura. Cada uno de ellos será revisado en forma separada.

Relación estadística intraespecífica de K y L_{∞}

Cuando se han calculado a partir de muestras las tallas medias a varios grupos de edad, cada una de estas medias posee una cierta varianza. Por lo tanto, no es de sorprender que dos muestras de la misma población entreguen tallas medias que difieren en, por ejemplo, 0.5 cm. A continuación se verá que es lo que ocurre con la estimación de K y L_{∞} cuando las tallas a la edad son alteradas por dicho monto. La columna B de la Tabla 3.4.0.2 muestra las tallas medias determinadas entre 1 y 5 años de edad, en una especie con $L_{\infty} = 60$ cm, $K = 0.24$, y $t_0 = 0$. Los incrementos anuales se han calculado en la columna C. Los valores de L_{∞} y K se calcularon a partir de éstos datos mediante el método de Chapman, según se describe en la Sección 3.3.2. Las diferencias respecto a los valores verdaderos se deben a errores de redondeo. La columna D representa las tallas a las que alternativamente se les ha sumados y

TABLA 3.4.0.2

Efecto que ocasiona la inexactitud en la determinación de las tallas medias a la edad en la determinación de K y L_{∞} . Las flechas indican si las longitudes medias han aumentado o disminuído

A	B	C		D	E		F	G
edad (años)	talla media cm	$L(t+1)$ - $L(t)$		talla media modificada en 0.5 cm				
t	L	ΔL		opción 1		opción 2		
				L	ΔL		L	ΔL
1	12.80	10.07	↑	13.20	9.17	↓	12.30	11.07
2	22.87	7.92	↓	22.37	8.92	↑	23.37	6.92
3	30.79	6.24	↑	31.29	5.24	↓	30.29	7.24
4	37.03	4.90	↓	36.53	5.90	↑	37.53	3.90
5	41.93	-	↑	42.43	-	↓	41.43	-
L_{∞}		60.16			67.46			53.82
K		0.2392			0.1931			0.3018
$\ln K = 6.6731 - 1.976 \ln L_{\infty}$								

restados 0.5 cm, según lo indican las flechas. El valor de L_{∞} resultante de determinarlo con dichos valores es más alto y el de K es más bajo que el obtenido con los datos originales (Columna B). En forma semejante, en la columna F las tallas originales fueron cambiadas nuevamente en 0.5 cm, pero en dirección opuesta a la realizada previamente. Ahora, L_{∞} es más bajo y K más alto. De esta manera, se tienen tres estimados de L_{∞} y K , que se supone están basados en igual número de muestras, tomadas de la misma población. Al efectuar el análisis de regresión simple, mediante la ecuación:

$$\ln K = a + b \cdot \ln L_{\infty}$$

con las tres "observaciones" de L_{∞} y K , se obtiene la siguiente expresión:

$$\ln K = 6.67 - 1.98 \cdot \ln L_{\infty}$$

Como resultado de esta experiencia tan simple, se obtiene como estimado de la pendiente un valor aproximado de -2 , que obviamente no es un resultado confiable; sin embargo, Pauly (1979) hizo estimaciones similares para más de 100 especies de peces para cada una de las cuales se hubieran publicado al menos tres pares de valores L_{∞} y K . Este autor calculó la pendiente para cada especie, luego las promedió, obteniendo de esa manera una media extremadamente cercana a -2 . En la actual estimación se utilizó W_{∞} en lugar de L_{∞} , considerando que $W_{\infty} = q \cdot L_{\infty}^3$. Además, se usaron logaritmos de base 10, lo que no altera la pendiente. Así, Pauly (1979) encontró que:

$$\log K = \phi - 0.67 \cdot \log W_{\infty} \quad (3.4.0.5)$$

$$\log K = \phi' - 2 \cdot \log L_{\infty} \quad (3.4.0.6)$$

en los cuales:

$$\phi' = \phi - 0.67 \cdot \log q \quad (3.4.0.7)$$

ϕ y particularmente ϕ' (fi-prima) son muy utilizados como el mejor medio disponible para promediar los parámetros de crecimiento de una especie en particular. Para ello, se calcula ϕ' para cada grupo de datos y luego se promedia. Al insertar en la Ec. 3.4.0.6 un valor de L_{∞} , por ejemplo la media de todos los estimados, se logra un valor de K que corresponde al L_{∞} utilizado. Cada vez que se estiman L_{∞} y K para la misma especie a partir de un nuevo grupo de datos, el cálculo de ϕ' indicará si el nuevo par de L_{∞} y K concuerda con los resultados anteriores. El nuevo ϕ' debiera ser cercano a los estimados previos, ya que ϕ' es la constante en la regresión del $\log K$ versus el $\log L_{\infty}$. Si resulta marcadamente diferente, habría razones para sospechar sobre la confiabilidad de los nuevos estimados de K y L_{∞} .

En la publicación de Pauly se incluye, además de la correlación estadística de sus datos, variaciones entre años y localizaciones, que podrían ser atribuidas a diferencias de temperatura y disponibilidad de alimento en el lugar donde viven los recursos. Cuando las diferencias en las curvas de crecimiento son causadas por condiciones ambientales, la relación entre L_{∞} y K , puede ser investigada usando ϕ' . Varios pares de L_{∞} y K deberían combinarse por cada estimado de la condición ambiental. Esto reducirá o incluso eliminará los efectos de la correlación estadística.

Correlación interespecífica de K y la talla asintótica (L_{∞})

Para investigar la correlación entre K y la talla asintótica entre diversas especies, se requiere de datos para especies de tamaños muy diferentes, ya que de otro modo, los efectos estadísticos y ambientales, discutidos con anterioridad, podrían interferir con el análisis. En este caso, se debería usar W_{∞} , a menos que las especies investigadas posean casi la misma forma; por ejemplo, que tengan el mismo valor de q .

La Fig. 3.4.0.6 muestra los $\ln K$ graficados contra los $\ln W_{\infty}$ de 81 especies de peces, para los cuales los estimados de W_{∞} varían entre 0.8 g y 825 kg. La relación establecida entre las variables queda expresada por la ecuación:

$$\ln K = 0.071 - 0.200 \cdot \ln W_{\infty}$$

En este caso, la pendiente es aproximadamente $1/3$ de la encontrada anteriormente para la relación

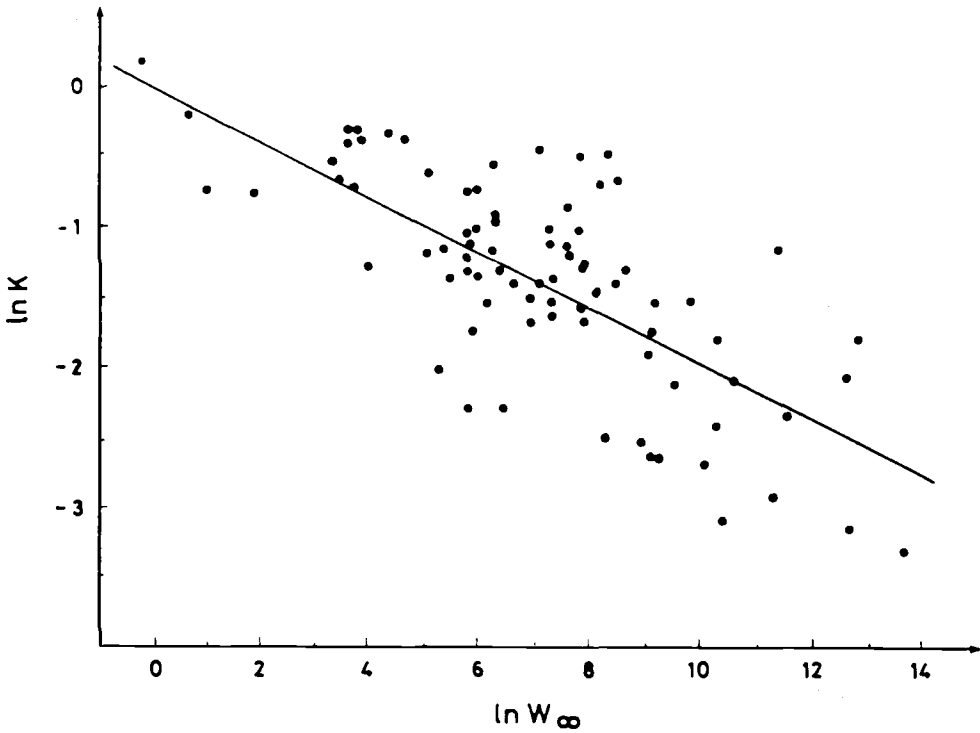


Fig. 3.4.0.6 Relación entre K y W_{∞} en 81 especies de peces, con valores de W_{∞} comprendidos entre $W_{\infty} = 0.8$ g y $W_{\infty} = 852$ kg (Modificado de Ursin, 1968).

estadística entre la misma especie, determinada de acuerdo a la Ec. 3.4.0.5. El estimado posee una varianza alta, debido a que se incluyeron en el análisis peces de niveles metabólicos muy diferentes. Peces pelágicos con una tasa metabólica alta son los que generan la mayoría de los puntos que se ubican sobre la línea ajustada, según se puede ver en la Fig. 3.4.0.6. Opuestamente, los peces demersales y de aguas profundas, que viven en aguas heladas, son los que originan muchos de los puntos que están por debajo de la línea.

Al efectuar este análisis por separado con cada familia de peces se reduce la varianza, puesto que la mayoría de ellas son, ya sea predominantemente pelágicas o predominantemente demersales. Esto se ilustra en un gráfico elaborado con datos de la Familia Scombridae (caballa y atún), Fig. 3.4.0.7, en el cual se ha intercalado, como referencia, la línea de regresión calculada en la Fig. 3.4.0.6.

La relación descrita se puede escribir de la siguiente manera:

$$\ln K = \ln KO - KS * \ln W_{\infty}$$

ó

$$K = KO * W_{\infty}^{-KS} \quad (3.4.0.8)$$

en la cual, $\ln KO$ es comparable a ϕ' , en la relación intraespecífica (Ec. 3.4.0.5). Para la estimación de KO se usa:

$$\ln KO = \ln K + KS * \ln W_{\infty}$$

ó

$$KO = K * W_{\infty}^{KS} \quad (3.4.0.9)$$

De acuerdo a lo anterior, KO es un índice de la tasa metabólica de un pez, moviéndose en forma normal, pero que no se ha alimentado recientemente (Ursin, 1968). La tasa metabólica se puede expresar, por ejemplo, mediante el consumo de oxígeno o la pérdida de peso durante la inanición.

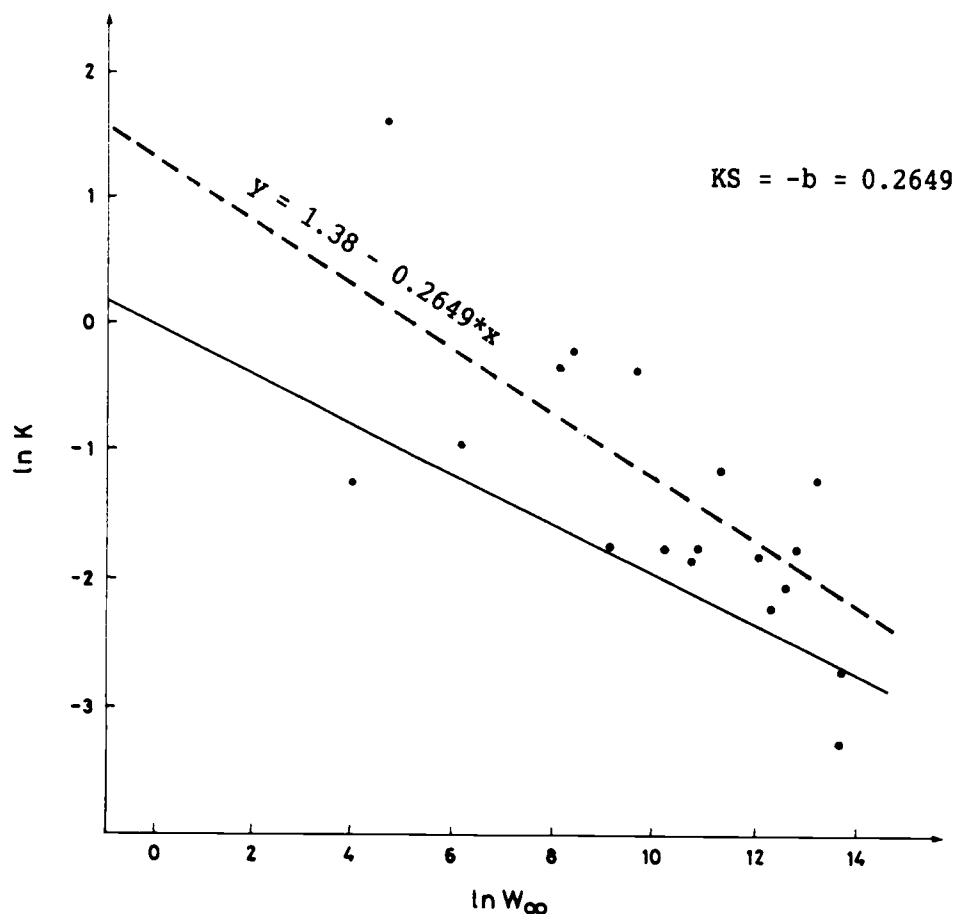


Fig. 3.4.0.7 Altos valores de K en peces pelágicos: Scombridae (línea punteada). Se ha insertado la regresión lineal de la Figura 3.4.0.6. Los datos corresponden a la Tabla 3.4.0.3.

De allí que KO es independiente de la talla de las especies: al graficar $\ln KO$ versus $\ln W_{\infty}$ resulta una línea de regresión con pendiente cero, mientras que al graficar ϕ o ϕ' contra $\ln W_{\infty}$ (ó el $\log W_{\infty}$) se obtiene una pendiente muy pronunciada, como se puede ver en la Fig. 3.4.0.8.

Gráficos separados de $\ln K$ versus $\ln W_{\infty}$, como el mostrado en la Fig. 3.4.0.7, fueron realizados para varias especies de la familia Scombridae. La pendiente de la regresión lineal ajustada a los puntos, es -0.26 y, por consiguiente, $KS = 0.26$. Este resultado y el obtenido para las otras cuatro familias son listados en la Tabla 3.4.0.3. El promedio de los valores KS corresponde a 0.22 , que es equivalente a $1/3$ de la pendiente de la fórmula de ϕ , de Pauly, que corresponde a 0.67 en la Ec. 3.4.0.5.

El índice metabólico medio de KO , para estas cinco familias, varía entre 0.81 en los peces mesopelágicos (Myctophidae) y 2.75 en peces epipelágicos de la familia Scombridae.

El índice KO resulta útil para obtener un estimado inicial de la curva de crecimiento de una especie que no ha sido investigada satisfactoriamente. El valor de W_{∞} se puede estimar a partir de la talla del pez más grande registrado en la captura, mientras que K puede ser determinado mediante la Ec. 3.4.0.8, utilizando el valor medio de KO estimado para la familia y el estimado global de KS , determinado en forma combinada con todas las familias ($KS = 0.22$, en la Tabla 3.4.0.3).

Como ejemplo del procedimiento descrito anteriormente, considere una especie de la familia

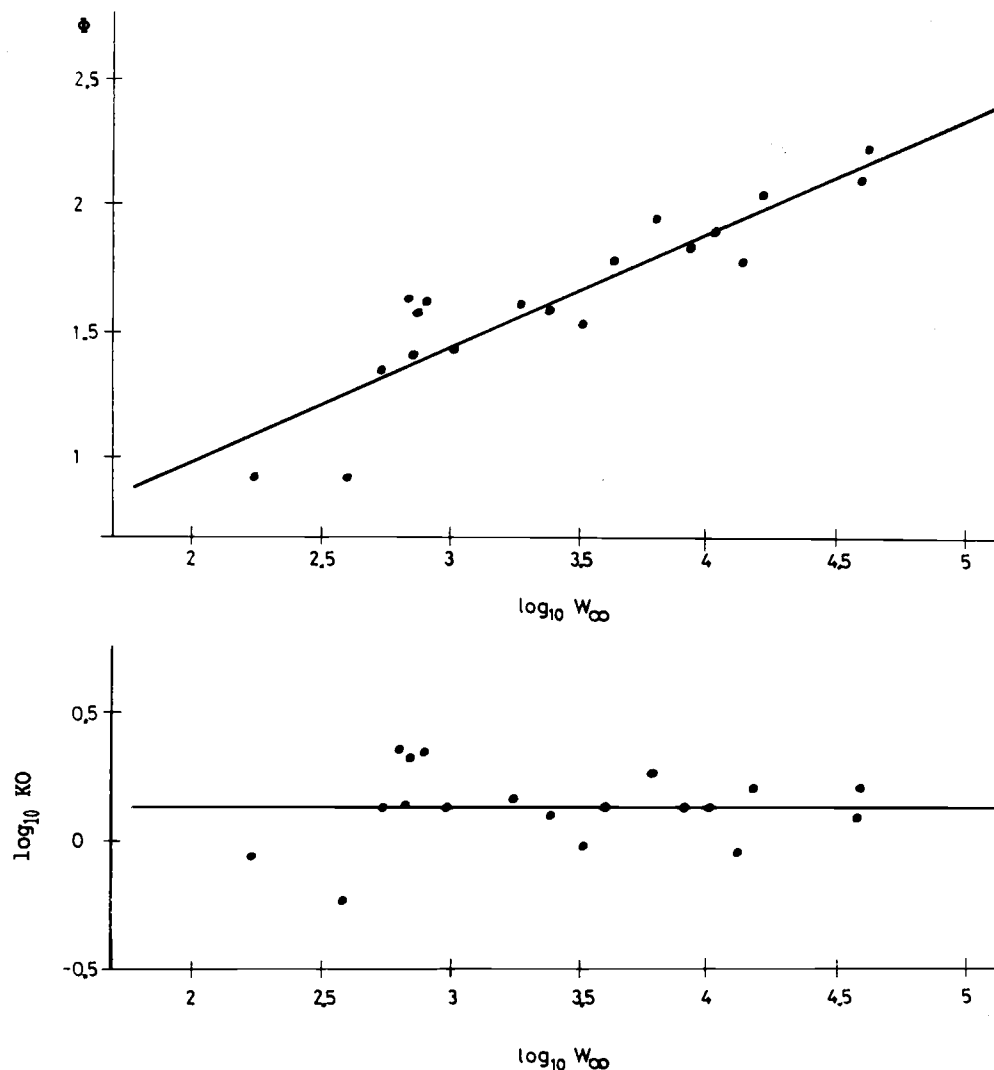


Fig. 3.4.0.8 Gráfico de ϕ (arriba) y $\log KO$ (abajo) versus $\log W_{\infty}$ en Serranidae (Datos de Munro, 1983).

Serranidae, para la cual $q = 0.02$ y se supone que el L_{∞} es de 30 cm. Entonces, $W_{\infty} = 0.02 \cdot 30^3 = 540$ g. Seguidamente, con $KS = 0.22$ y $KO = 1.36$ (véase la Tabla 3.4.0.3), se obtiene:

$$K = 1.36 \cdot 540^{-0.22} = 0.34$$

Al igual que en la fórmula ϕ , la Ec. 3.4.0.8 puede ser cambiada en una función de L_{∞} , insertándole $W_{\infty} = q \cdot L_{\infty}^3$, lo que da:

$$\ln K = \ln KO' - 3 \cdot KS \cdot \ln L_{\infty} \quad (3.4.0.10)$$

donde:

$$\ln KO' = \ln KO - KS \cdot \ln q \quad (3.4.0.11)$$

Ahora, al igual que ϕ , $\ln KO'$ es una función de q , y, por lo tanto, dependiente de la forma del pez. Mientras que ϕ es usado dentro de una especie, y consecuentemente con q constante o con un valor semejante, KO y KO' se utilizan para efectuar comparaciones entre especies, en las cuales q es a menudo variable. En estos casos, donde q demuestra que no es constante, se debería utilizar la Ec. 3.4.0.8.

Para enfatizar el uso diferente de ϕ (en stocks intraespecíficos) y de KO (entre especies dentro

TABLA 3.4.0.3
Estimación de los parámetros de la Ec. 3.4.0.9 en cinco familias de peces. Datos de Ursin, 1968, Pauly, 1980b y Munro, 1983a

familia	número de pares de valores K y W_{∞}	-pendiente KS	valor medio de ln KO	índice metabólico KO
Myctophidae	5	0.28	-0.21	0.81
Pleuronectidae	7	0.17	0.31	1.36
Gadidae	12	0.21	0.34	1.40
Scombridae	18	0.26	1.01	2.75
Serranidae	19	0.20	0.31	1.36
promedio		0.22		

de una determinada familia), considere la Fig. 3.4.0.8, en la cual ϕ y el log KO están graficados contra el log W_{∞} . En este caso, se usan logaritmos de base 10 en atención a que ϕ está definido de esa manera. La pendiente en la relación con log KO es obviamente cero, dado que KO es independiente del tamaño de las especies, mientras que ϕ , tiene una pendiente de 0.47. Esta es, aproximadamente, la diferencia entre la pendiente 0.67 de la ecuación ϕ , (Ec. 3.4.0.5) y la pendiente de la ecuación de KO, $KS = 0.22$ (Ec. 3.4.0.8 y Tabla 3.4.0.3).

La desviación estándar de la línea de regresión ϕ , en la Fig. 3.4.0.8 (arriba), es igual a la desviación estándar de la línea del log KO (Fig. 3.4.0.8, abajo). Sin embargo, la distribución global de ϕ , posee una desviación estándar mayor cuando se ignora la relación lineal al utilizar log W_{∞} (véase la Fig. 3.4.0.9, abajo). Varios autores han publicado histogramas similares a la Fig. 3.4.0.9 con la distribución de ϕ , en ciertas familias de peces. En estos histogramas se debe esperar que los valores más bajos representen a las especies pequeñas y los más altos a las de mayor tamaño.

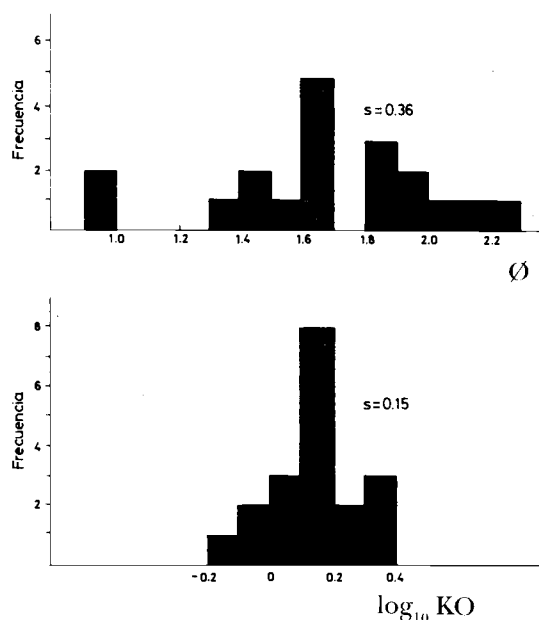


Fig. 3.4.0.9 Distribución de frecuencias de los estimados de ϕ (arriba) y de $\log_{10} KO$ (abajo), en especies de la familia Serranidae (véase la Fig. 3.4.0.8).

3.4.1 El método de Bhattacharya

En la Sección 2.2 se expusieron varias formas de representación gráfica de una distribución normal. Una de ellas es el método de Bhattacharya (1967), que resulta útil para dividir una distribución compuesta en sus correspondientes distribuciones normales, cuando una misma muestra de peces incluye varios grupos de edad o cohortes. Este método se examinará en detalle sobre la base del ejemplo hipotético de la Tabla 3.2.1.1. En este caso, se conoce la solución: el conjunto de distribuciones normales que componen el total. Por lo tanto, es posible comprobar la validez del resultado del análisis.

Bases del procedimiento de cálculo del método de Bhattacharya

El método de Bhattacharya consiste básicamente en separar las distribuciones normales, cada una de las cuales representa una cohorte de peces, de la distribución de frecuencias total, comenzando por el lado izquierdo de ésta. Una vez determinada la primera distribución normal, ésta se elimina de la distribución total y se repite el mismo procedimiento hasta que ya no sea posible separar otras distribuciones normales de la distribución total. Todo el proceso se puede dividir en las siguientes etapas:

- Etapas 1:** Determine una pendiente no contaminada (limpia) de una distribución normal, en el lado izquierdo de la distribución total.
- Etapas 2:** Determine la distribución normal de la primera cohorte mediante su transformación en una línea recta.
- Etapas 3:** Determine el número de peces de cada grupo de tallas en esa primera cohorte y restaiga dicho valor de la correspondiente distribución total.
- Etapas 4:** Repita el proceso para la siguiente distribución normal, a partir de la izquierda, hasta que no encuentre más distribuciones normales limpias.
- Etapas 5:** Relacione las tallas medias de las cohortes determinadas en los pasos 1 y 4 con la diferencia de edad entre las cohortes.

Como ya se ha indicado en la Sección 2.6, una distribución normal se transforma en una línea recta cuando: 1) los números se reemplazan por sus logaritmos; y, 2) se calculan las diferencias entre valores logarítmicos consecutivos. Sea N el número de individuos de una muestra de frecuencias de tallas perteneciente al grupo de tallas:

$$[x - dL/2, x + dL/2]$$

donde dL es la amplitud del intervalo, x es el punto medio de éste (o marca de clase) y $x+d/2$ es su límite superior del intervalo.

Si un cierto rango de tallas de la muestra contiene sólo una cohorte, esa parte de la muestra de frecuencias debería formar una distribución normal (por ejemplo, de 10 a 21 cm en la muestra de la Fig. 3.2.2.2). En este caso, la relación lineal (véase la Ec. 2.6.5):

$$\Delta \ln N = a + b(x + dL/2)$$

se mantendría entre la diferencia del logaritmo del número en una categoría de tallas específico y el logaritmo del número de la categoría anterior o

$$\Delta \ln N = \ln N(x + dL/2, x + 3dL/2) - \ln N(x - dL/2, x + dL/2)$$

como la variable dependiente, y el límite superior del grupo de tallas más pequeño:

$$x + dL/2$$

como la variable independiente (véanse las Figs. 2.6.4 y 2.6.5).

Recuerde que la desviación estándar de la distribución normal y la media se obtienen mediante:

$$s = \sqrt{dL/b} \quad \text{y} \quad \bar{x} = -a/b \quad (\text{véanse las Ecs. 2.6.6 y 2.6.7}).$$

Ejemplo 10: Análisis de Bhattacharya con un conjunto de datos hipotéticos

Los procedimientos computacionales relacionados a los pasos 1 al 5 de la sección anterior serán ilustrados a continuación utilizando el conjunto de datos hipotéticos presentados previamente, en la Tabla 3.2.1.1 y su correspondiente representación gráfica de la Fig. 3.2.2.1. Este conjunto de datos fue creado a partir de 6 componentes normalmente distribuidos, como se muestra en la Fig.3.2.2.2.

Intente ahora, utilizar el método de Bhattacharya para analizar la columna denominada como “total” en la Tabla 3.2.1.1, para descomponerla en las seis distribuciones normales que la componen. La ventaja de usar un conjunto de datos construidos es que luego será posible comparar los resultados del análisis de Bhattacharya con los datos de entrada exactos. Por lo tanto, se podrán ilustrar todas las posibilidades y limitaciones de este método. En términos generales, se seguirá paso a paso, el procedimiento computacional, con ejemplos extraídos del conjunto de datos de la Tabla 3.2.1.1. A menos que se indique de otra manera, los ejemplos corresponden a la Tabla 3.4.1.1., el cual es el primero de una serie de láminas de trabajo.

Paso 1: Crear una lámina de trabajo como la Tabla 3.4.1.1 y completar la columna A, los grupos de tallas, y la columna B, con las frecuencias correspondientes del conjunto de datos disponibles.

Por ejemplo: Las columnas A y B en la Tabla 3.4.1.1, se toman de la Tabla 3.2.1.1. La columna B es denominada “N1+”, porque contiene la distribución de la primera cohorte (N1) además de todas las otras cohortes. En general, el símbolo “Na+” representa la a-ésima cohorte más las cohortes más viejas.

Paso 2: Crear la columna C, tomando los logaritmos de las frecuencias de N1+ (Columna B).

Ejemplos: $\ln 1 = 0$
 $\ln 4 = 1.386$

Paso 3: La columna D contiene las diferencias entre los logaritmos de dos frecuencias adyacentes.

$\Delta \ln N1+ = \ln N1+$ de la línea, menos el $\ln N1+$ de la línea previa.

Complete la columna D. Comience en la *segunda* línea, resta el valor de \ln de la primera línea de la columna C, de aquel de la segunda línea de la columna C y colóquelo en la segunda línea de la columna D. El primer lugar permanece abierto, ya que no existe diferencia entre el primer punto y un punto previo a éste. Tenga la preocupación de utilizar al menos tres decimales. Prosiga el ejercicio determinando las diferencias ($\Delta \ln$) entre la tercera y la segunda línea, etc.

Ejemplo:

A	B	C	D	E
L1-L2	N1+	$\ln N1+$	$\Delta \ln N1+$	I.
12-13	1	0	-	
13-14	4	1.386	$1.386-0 = 1.386$	13
14-15	11	2.398	$2.398-1.386 = 1.012$	14

TABLA 3.4.1.1

Método de Bhattacharya: estimación de la primera cohorte, N1 (la cohorte de primavera de 1983).

El símbolo “#” en las columnas B, C, G y H indica donde comenzar los cálculos de N1 (véase la Fig. 3.4.1.2). La columna I contiene el remanente de la muestra (N1+ - N1 = N2+)

A	B	C	D	E	F	G	H	I
L1-L2	N1+	ln N1+	$\Delta \ln N1+$ (y)	L (x)	$\Delta \ln N1$	ln N1	N1	N2+
12-13	1	0	-	-	-	-	1	0
13-14	4	1.386	1.386	13*	1.375	-	4	0
14-15	11	2.398	1.012	14*	1.059	-	11	0
15-16	24	3.178	0.780	15*	0.743	-	24	0
16-17	38#	3.638#	0.460	16*	0.427	3.638#	38#	0
17-18	42	3.738	0.100	17*	0.111	3.749	(42.48)	(-0.48)
18-19	33	3.497	-0.241	18*	-0.205	3.544	(34.61)	(-1.61)
19-20	20	2.996	-0.501	19*	-0.521	3.023	(20.55)	(-0.55)
20-21	7	1.946	-1.050	20	-0.837	2.186	(8.90)	(-1.90)
21-22	3	1.099	-0.847	21	-1.153	1.033	2.81	0.19
22-23	3	1.099	0.000	22	-1.469	-0.436	0.65	2.35
23-24	5	1.609	0.511	23	-1.785	-2.211	0.11	4.89
24-25	8	2.079	0.470	24	-	-	-	8
25-26	11	2.398	0.319	25	-	-	-	11
26-27	14	2.639	0.241	26	-	-	-	14
27-28	17	2.833	0.194	27	-	-	-	17
28-29	16	2.773	-0.060	28	-	-	-	16
29-30	15	2.708	-0.065	29	-	-	-	15
30-31	14	2.639	-0.069	30	-	-	-	14
31-32	11	2.398	-0.241	31	-	-	-	11
32-33	11	2.398	0.000	32	-	-	-	11
33-34	10	2.303	-0.095	33	-	-	-	10
34-35	9	2.197	-0.106	34	-	-	-	9
35-36	10	2.303	0.106	35	-	-	-	10
36-37	11	2.398	0.095	36	-	-	-	11
37-38	10	2.303	-0.095	37	-	-	-	10
38-39	10	2.303	0.000	38	-	-	-	10
39-40	11	2.398	0.095	39	-	-	-	11
40-41	11	2.398	0.000	40	-	-	-	11
41-42	9	2.197	-0.201	41	-	-	-	9
42-43	7	1.946	-0.251	42	-	-	-	7
43-44	7	1.946	0.000	43	-	-	-	7
44-45	5	1.609	-0.337	44	-	-	-	5
45-46	6	1.792	0.183	45	-	-	-	6
46-47	5	1.609	-0.183	46	-	-	-	5
47-48	3	1.099	-0.510	47	-	-	-	3
48-49	2	0.693	-0.406	48	-	-	-	2
49-50	2	0.693	0.000	49	-	-	-	2
50-51	2	0.693	0.000	50	-	-	-	2
51-52	1	0.000	-0.693	51	-	-	-	1

Intervalo de clase, dL = 1. Número total de peces en la cohorte N1: 183.57

*) puntos usados en el análisis de regresión, dando como resultado:

$$a = 5.4834, b = -0.3160, \bar{L}(N1) = -a/b = 17.35, s(N1) = \sqrt{(-dL/b)} = 1.78$$

Paso 4: Complete la columna E. Recuerde de la Sección 2.6 que $\Delta \ln N1+$ debería ser representado gráficamente respecto del límite superior del grupo de tallas más pequeño utilizado para calcular $\Delta \ln N1+$. Inserte el punto medio, el límite superior del más pequeño de entre las dos categorías, o el límite inferior del más grande de las dos a un mismo nivel que el $\Delta \ln N$ correspondiente.

Véase el ejemplo del Paso 3.

Paso 5: Haga un gráfico completo de la talla (columna E, en eje x) respecto de $\Delta \ln N1+$ (columna D, en el eje y).

Ejemplo: Véase la Fig. 3.4.1.1.

Paso 6: Examine el gráfico y determine que puntos corresponden a una línea recta. Marque estos puntos en la columna E. No incluya puntos que se puedan ver afectados por la siguiente distribución. Mientras más a la derecha se ubiquen estos puntos, más alta es la probabilidad de que sean influenciados por la siguiente distribución.

Ejemplo: Una inspección visual de la Fig. 3.4.1.1 muestra que se puede trazar una línea recta por los primeros siete puntos (indicados por "*" en la Tabla 3.4.1.1). Incluso el octavo punto se encuentra en esta misma línea, pero debido a que podría estar influenciado por la distribución siguiente, no se le incluyó en los cálculos subsecuentes.

Esta línea recta corresponde al primer componente normalmente distribuido, N1, que es interpretado como la cohorte de primavera de 1983. El hecho de que N1 dé una línea recta tan precisa no es sorprendente, ya que el primer componente se superpone muy poco con su componente vecino, como se puede observar en la Figs. 3.2.2.1 y 3.2.2.2.

Paso 7: Calcule la línea recta que corresponde a los puntos regresando la columna E respecto a la columna D para los puntos seleccionados (asteriscos). Determine el intercepto, (a) y la pendiente (b) y calcule la talla media.

$$\bar{L}(N1) = -a/b \text{ y la desviación estándar } s(N1) = \sqrt{-1/b}$$

Ejemplo: $y = a + b \cdot x$

donde $y = \Delta \ln N1+$ (en la columna D) y

$x = L$ (en la columna E)

a (intercepto) = 5.4834, b (pendiente) = -0.3160

$$\bar{L}(N1) = -a/b = 17.35 \text{ cm y } s(N1) = \sqrt{-1/b} = 1.78$$

La línea de regresión se muestra en la Fig. 3.4.1.2.

Ya se ha determinado la línea que representa una distribución normal, la cual debería corresponder en casi toda su extensión con el lado izquierdo de la distribución actual de la muestra. La línea debiera representar a la primera cohorte, N1. Para determinar cuan efectivo es esto, primero se deben calcular los valores teóricos de $\Delta \ln N1$, correspondientes a la línea que se acaba de determinar y luego revertir el proceso y convertir las diferencias ($\Delta \ln N1$) en $\ln N1$ y luego en números (N1). Este proceso está ilustrado en las columnas F, G y H de la Tabla 3.4.1.1.

La segunda parte del procedimiento computacional consta de los siguientes pasos:

Paso 8: La fórmula $\Delta \ln N = a + bL$ puede ahora ser usada para calcular el valor teórico $\Delta \ln N1$. Esto se hace para tantos grupos de tallas como se puede esperar encontrar en la primera cohorte (distribución normal).

Ejemplo: El valor de $\Delta \ln N1$ para los grupos de tallas 12-13 y 13-14, con una talla media de 13, se determina de

$$a+b \cdot 13 = 5.4834 - 0.3160 \cdot 13 = 1.375$$

el cual es el primer valor en la columna F, mientras que el valor siguiente es

$$a+b \cdot 14 = 1.059, \text{ etc.}$$

Paso 9: Para ser capaces de convertir "una diferencia", $\Delta \ln N$, en sus dos componentes, $\ln N$ de un grupo de talla específico y $\ln N$ del grupo de talla sobre éste, se necesita un punto de partida.

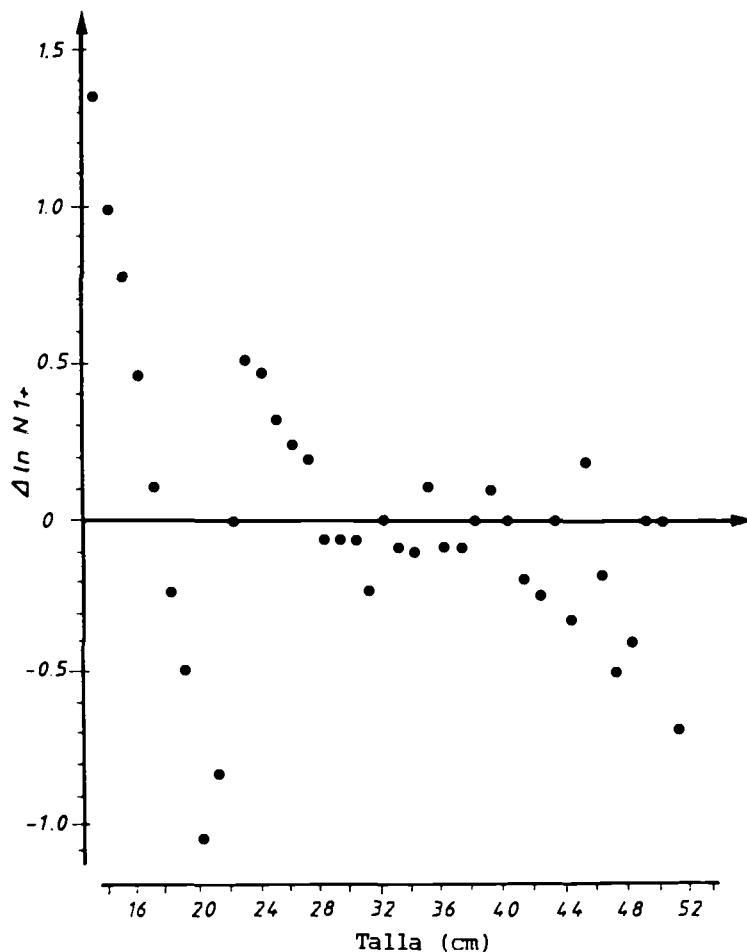


Fig. 3.4.1.1 Método de Bhattacharya: gráfico correspondiente a los valores de las columnas D (eje y) y E (eje x) de la Tabla 3.4.1.1.

Este debe corresponder a una frecuencia que no se encuentre contaminada por superposición con la cohorte siguiente (distribución normal). Por consiguiente, se debería escoger una frecuencia del costado izquierdo de la primera distribución normal. Así también, se debe tener cuidado que esa frecuencia no sea demasiado baja.

Ejemplo: La frecuencia 38 del grupo de tallas 16-17 cm fue escogido como un punto de partida limpio, que se indica con el símbolo “#” en la columna H. Este se utiliza como valor inicial de N_1 , los números en la distribución de frecuencias de tallas de la primera cohorte. El verdadero punto de partida es el *logaritmo* de 38, es decir 3.638 (véase la columna C). Este valor se inserta en la columna G. La elección de 38 como una frecuencia “limpia” implica que las frecuencias que se ubican a su izquierda, vale decir las que se encuentran sobre esta en la Tabla, es decir, 1, 4, 11 y 24, también son considerados como limpias. En otras palabras, se supone que ninguna de estas frecuencias se superpone con la próxima cohorte, por lo tanto, todas son frecuencias limpias de la primera distribución normal N_1 (la cohorte de primavera de 1983).

Paso 10: Se tiene ahora $\Delta \ln N_1$ correspondiente a dos clases adyacentes de tallas en la columna F y el primer $\ln N_1$ de la clase de talla inferior en la columna G, lo que permite calcular el $\ln N_1$ de la clase siguiente usando esta fórmula:

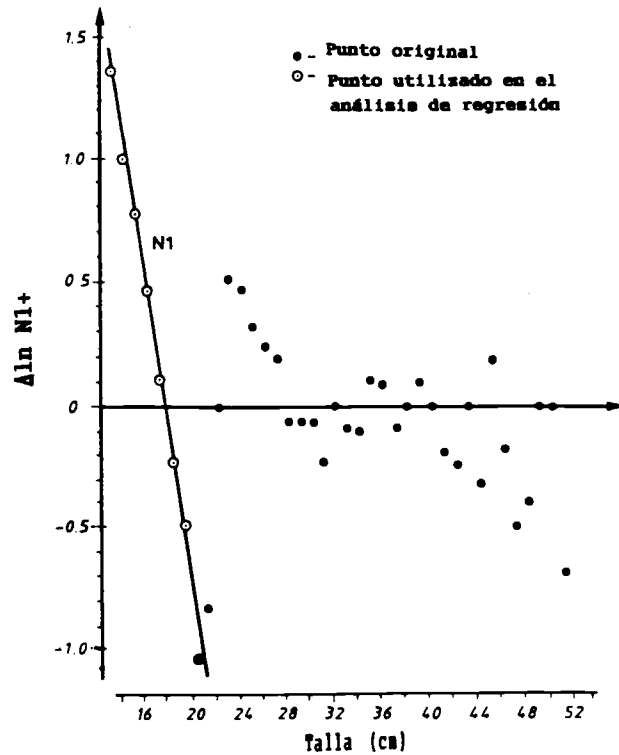


Fig. 3.4.1.2 Método de Bhattacharya: línea de regresión calculada para la primera cohorte (véanse las columnas D y E de la Tabla 3.4.1.1).

$\ln N1$ (clase de talla superior) = $\ln N1$ (clase de talla inferior) + el $\Delta \ln N1$ correspondiente.
Ejemplo:

$$\begin{aligned} \ln N1(17-18) &= \ln N1(16 - 17) + \Delta \ln N1(17-18 \text{ y } 16 - 17) \\ \ln N1(17-18) &= 3.638 + 0.111 = 3.749 \\ \ln N1(18-19) &= 3.749 + (-0.295) = 3.544 \end{aligned}$$

Los nuevos valores son registrados en la columna G.

Paso 11: Los números correspondientes a $\ln N1$ en la columna G se pueden encontrar y registrar en la columna H, tomando sus antilogaritmos. Esta columna se detiene cuando el número de la columna H se acerca a cero.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{para el grupo de tallas 17-18: } N1(17-18) &= \exp(3.749) = 42.48 \\ \text{para el grupo de tallas 18-19: } N1(18-19) &= \exp(3.544) = 34.61 \end{aligned}$$

Los resultados (de la columna H) no son exactamente iguales a las frecuencias observadas que se listan en la columna B, ya que las observaciones siempre difieren algo de los valores teóricos. En el caso actual, correspondiente a un conjunto de datos hipotético, las divergencias se deben a errores de aproximación. Con datos “reales” hay también desviaciones causadas por el “ruido aleatorio”. Aún si la muestra es una muestra aleatoria perfecta, las observaciones fluctuarán en torno a la verdadera distribución de tallas (la distribución de tallas de la población).

Paso 12: El número de peces por grupos de tallas perteneciente a la cohorte más joven (primavera de 1983) o $N1$, de la columna G, puede ahora ser sustraída de la distribución total,

o $N1+$, de la columna B. La nueva distribución obtenida se ubica en la columna I y se la designa como $N2+$, es decir, la distribución de frecuencia de los peces en la segunda cohorte más todas las cohortes subsiguientes.

$$N1+ \text{ menos } N1 = N2+ \text{ o columna B - columna H = columna I}$$

En la práctica puede ocurrir que los valores de la columna I se vuelvan negativos, debido a una variación aleatoria de las observaciones. Sin embargo, esto puede ser arreglado.

Cuando quiera que la estimación de los números de $N2+$ se vuelvan negativos, se asigna el valor cero a $N2+$ (en la columna I) mientras que a $N1$ se le da el valor de la columna B.

Ejemplos:

$42 - 42.48 = -0.48$, que se ajusta a 0 en la columna I, y a 42 en la columna H.

$33 - 34.61 = -1.61$, que se ajusta a 0 en la columna I, y a 33 en la columna H.

Los resultados de todo el análisis de la primera distribución normal serán:

A L1-L2	B N1+	H N1	I N2+
12-13	1	1	0
13-14	4	4	0
14-15	11	11	0
15-16	24	24	0
16-17	38	38	0
17-18	42	42	0
18-19	33	33	0
19-20	20	20	0
20-21	7	7	0
21-22	3	2.81	0.19
22-23	3	0.65	2.35
23-24	5	0.11	4.89
24-25	8	0	8

Número total de peces en la cohorte N1 = 183.57

$$\bar{L}(N1) = 17.35 \text{ y } s(N1) = 1.78$$

Ya que esto se basa en un conjunto de datos hipotéticos, se pueden comparar los resultados con los valores reales, que se encuentran en la Tabla 3.2.1.1 (primavera de 1983):

$$\text{Número total (N1)} = 182, \bar{L}(N1) = 17.3 \text{ y } s(N1) = 1.7$$

En este caso, los resultados obtenidos por medio del análisis se acercan mucho a los valores reales. De este modo se han obtenido todos los elementos necesarios para describir la primera distribución normal, es decir,

$$\bar{L}(N1), s(N1) \text{ y } n(N1)$$

Todo el proceso se debe repetir para obtener los valores de la próxima distribución normal, pertenecientes a la cohorte nacida en el otoño de 1982 (véase la Tabla 3.2.1.1).

De esta manera se termina de utilizar la Tabla 3.4.1.1. Eliminando todos los valores relativos a $N1$ se crea la próxima ficha de trabajo (Tabla 3.4.1.2), con $N2+$ (columna I de la Tabla 3.4.1.1) como nueva columna B. Entonces, se puede repetir todo el procedimiento.

La Fig. 3.4.1.3 muestra el gráfico de Bhattacharya para N2+ junto con la línea estimada para N1. Ahora en el análisis se utilizan sólo los puntos situados a la derecha de la línea quebrada de la Fig. 3.4.1.3. La línea de N1 se dibuja únicamente para fines de comparación. Algunos puntos se han desplazado debido a la sustracción de N1. Los puntos “antiguos” (es decir, los correspondientes al gráfico de N1+) se indican con “x” y los “nuevos” por un punto (Δ), en los casos en que el desplazamiento es visible. Se ha hecho caso omiso de los dos primeros puntos (correspondientes a las tallas 21 y 22 cm), ya que se refieren a números muy pequeños de individuos.

La selección de los puntos que se ajustan a una línea recta es ahora un poco más difícil que en el caso de la primera cohorte. En la Fig. 3.4.1.3 se eligieron los seis puntos que van de las tallas 23 a 28 cm. Aquí cabe preguntarse por qué se eligieron estos puntos y no, por ejemplo, los de las tallas 24 a 29 cm, o bien 24 a 28 cm. La elección es subjetiva: a veces, los resultados del método de Bhattacharya pueden depender de la persona que realiza el análisis. Por ejemplo, si sólo se utilizaran los puntos de las tallas 24 a 27 cm, la talla media estimada sería 28.7 cm y la desviación estándar 3.2 cm. La elección hecha en la Fig. 3.4.1.3 da una media de $L_2 = 27.76$ cm y una desviación estándar de 2.66 cm, que se aproximan mucho a los valores verdaderos (véanse las Tablas 3.2.1.1 y 3.4.1.2). Esto, sin embargo, no sirve para justificar la elección, ya que en la realidad no se conocerían los valores verdaderos. También es subjetiva la selección del valor “limpio” de $\ln N_2$ a partir del cual se calculan N_2 y N_3+ . Cuánto más se desvían las observaciones de las frecuencias calculadas, tanto más pronunciado es el elemento de subjetividad.

En resumen los resultados obtenidos hasta aquí son:

cohorte N1: talla media 17.35 cm, desviación estándar 1.78 cm
(Tabla 3.4.1.1)

cohorte N2: talla media 27.77 cm, desviación estándar 2.66 cm
(Tabla 3.4.1.2)

Ahora que se han estimado las tallas medias de las dos primeras cohortes, se está en condiciones de obtener una primera estimación aproximada del parámetro K de von Bertalanffy, siempre que se cuente también con una estimación de la diferencia de edad entre ambas cohortes. Para ello se utilizan las Ecs. 3.4.0.1 y 3.4.0.2, con una diferencia de tiempo entre las dos cohortes de $t_2 - t_1 = 0.5$ años. Además, se emplea una estimación aproximada de L_∞ basada en la muestra de frecuencias de tallas, que indica que los peces rara vez alcanzan más de 50 cm, por lo que se elige que $L_\infty = 50$ cm. La Ec. 3.4.0.1 da:

$$K = \frac{1}{t_2 - t_1} * \ln \frac{L_\infty - \bar{L}(t_1)}{L_\infty - \bar{L}(t_2)} = \frac{1}{0.5} * \ln \frac{50 - 17.35}{50 - 27.77} = 0.77$$

y la Ec. 3.4.0.2:

$$t_0 = t_1 + \frac{1}{K} * \ln \left(1 - \frac{\bar{L}(t_1)}{L_\infty} \right) = 0.5 + \frac{1}{0.77} * \ln \left(1 - \frac{17.35}{50} \right) = -0.05$$

donde el valor $t_1 = 0.5$ es una edad arbitraria.

De esta manera, como primera estimación aproximada de la curva de crecimiento se tiene:

$$L(t) = 50 * [1 - \exp(-0.77 * (t + 0.05))]]$$

Este procedimiento de estimación no se suele recomendar. Aquí lo hemos explicado para demostrar que en realidad se requieren muy pocos datos para estimar de forma aproximada una curva de crecimiento. Sin embargo, esta primera estimación puede servir para predecir la siguiente talla media, es decir, la talla media de la cohorte N3.

Suponiendo que la cohorte N3 tenga 1.5 años de edad, se tiene que:

$$L(1.5) = 50 * [1 - \exp(-0.77 * (1.5 + 0.05))] = 34.8 \text{ cm}$$

TABLA 3.4.1.2
Método de Bhattacharya: Estimación de la segunda cohorte, N2 (la cohorte de otoño de 1982). El
símbolo “#” en las columnas B, C, G y H indica donde comenzar los cálculos de N2
(véase la Fig. 3.4.1.3)

A	B	C	D	E	F	G	H	I
L1-L2	N2+	ln N2+	Δln N2+	L	Δln N2	ln N2	N2	N3+
12-13	0	-	-	-	-	-	0	0
13-14	0	-	-	13	-	-	0	0
14-15	0	-	-	14	-	-	0	0
15-16	0	-	-	15	-	-	0	0
16-17	0	-	-	16	-	-	0	0
17-18	0	-	-	17	-	-	0	0
18-19	0	-	-	18	-	-	0	0
19-20	0	-	-	19	-	-	0	0
20-21	0	-	-	20	-	-	0	0
21-22	0.19	-1.661	-	21	-	-	0.19	0
22-23	2.35	0.854	2.515	22	-	-	2.35	0
23-24	4.89	1.587	0.733	23*	-	-	4.89	0
24-25	8	2.079	0.492	24*	-	-	8	0
25-26	11	2.398	0.319	25*	-	-	11	0
26-27	14#	2.639#	0.241	26*	0.248	2.639#	14#	0
27-28	17	2.833	0.194	27*	0.107	2.746	15.58	1.42
28-29	16	2.773	-0.060	28*	-0.034	2.712	15.06	0.94
29-30	15	2.708	-0.065	29	-0.175	2.537	12.64	2.36
30-31	14	2.639	-0.069	30	-0.316	2.221	9.22	4.78
31-32	11	2.398	-0.241	31	-0.457	1.764	5.84	5.16
32-33	11	2.398	0.000	32	-0.598	1.166	3.21	7.79
33-34	10	2.303	-0.095	33	-0.740	0.426	1.53	8.47
34-35	9	2.197	-0.106	34	-0.881	-0.455	0.63	8.37
35-36	10	2.303	0.106	35	-1.022	-1.477	0.23	9.77
36-37	11	2.398	0.095	36	-1.163	-2.640	0.07	10.93
37-38	10	2.303	-0.095	37	-	-	-	10
38-39	10	2.303	0.000	38	-	-	-	10
39-40	11	2.398	0.095	39	-	-	-	11
40-41	11	2.398	0.000	40	-	-	-	11
41-42	9	2.197	-0.201	41	-	-	-	9
42-43	7	1.946	-0.251	42	-	-	-	7
43-44	7	1.946	0.000	43	-	-	-	7
44-45	5	1.609	-0.337	44	-	-	-	5
45-46	6	1.792	0.183	45	-	-	-	6
46-47	5	1.609	-0.183	46	-	-	-	5
47-48	3	1.099	-0.510	47	-	-	-	3
48-49	2	0.693	-0.406	48	-	-	-	2
49-50	2	0.693	0.000	49	-	-	-	2
50-51	2	0.693	0.000	50	-	-	-	2
51-52	1	0.000	-0.693	51	-	-	-	1

Número total de peces en la cohorte N2: 104.44

*) puntos usados en el análisis de regresión, dando como resultado:

$$a = 3.9168, b = -0.1411, \bar{L}(N2) = -a/b = 27.77, s(N2) = \sqrt{(-dI/b)} = 2.66$$

La Tabla 3.4.1.3 ha sido preparada para el análisis de N3+ y el correspondiente gráfico de Bhattacharya se presenta en la Fig. 3.4.1.4. La elección de los puntos usados en la regresión para N3 es aún más dudosa que en el caso de la cohorte N2. No obstante, el valor medio estimado de $\bar{L}3 = 33.8$ cm resulta razonablemente parecido al valor de 34.8 cm calculado más arriba, y que sabemos que está muy cerca del valor verdadero que es 35.3 cm (Tabla 3.2.1.1).

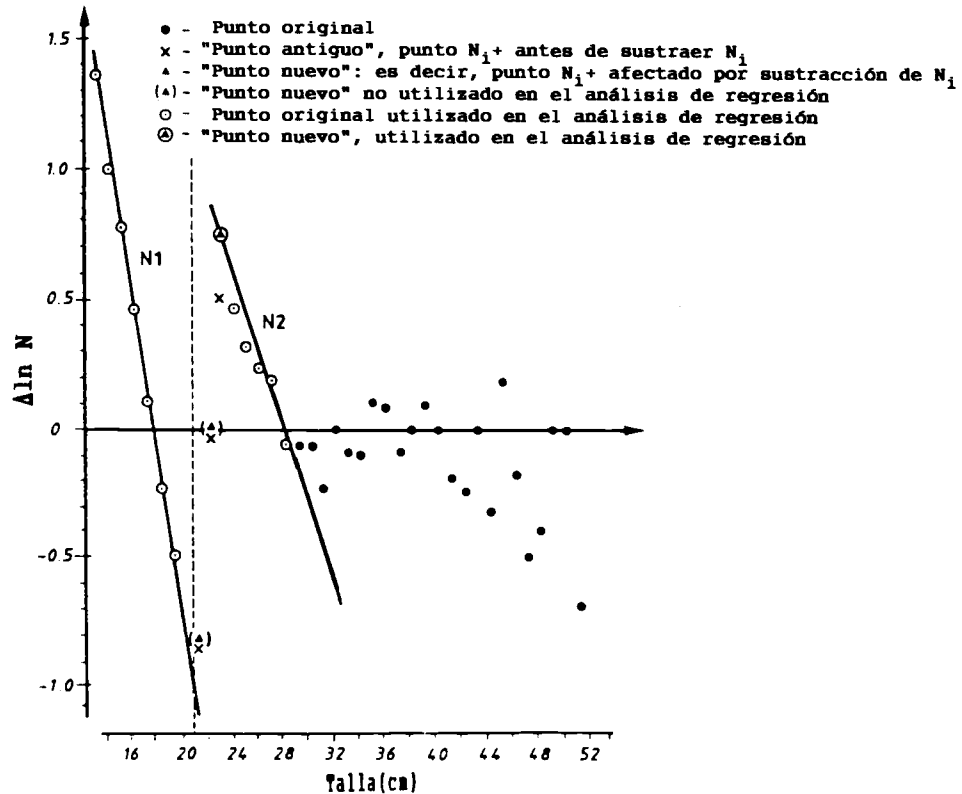


Fig. 3.4.1.3 Método de Bhattacharya: línea de regresión calculada para la segunda cohorte (véanse las columnas D y E de la Tabla 3.4.1.2).

Al contar con tres tallas medias se está en condiciones de aplicar el gráfico de von Bertalanffy (véase en la Sección 3.3.3, la Ec. 3.3.3.1), suponiendo nuevamente la edad arbitraria de 0.5 años para la primera cohorte. Los datos de entrada para el cálculo de K y t_0 mediante el gráfico de von Bertalanffy y los resultados del análisis de regresión se incluyen en la Tabla 3.4.1.4. La estimación de $t_0 = -0.13$ es un valor arbitrario, ya que se usan edades arbitrarias. Sin embargo, permite calcular la talla a cualquier otra edad, puesto que la forma de la curva de crecimiento es independiente de t_0 . Con los nuevos parámetros estimados en la Tabla 3.4.1.4, la talla media prevista de la cohorte N_4 es:

$$L(2.0) = 50 * [1 - \exp(-0.7 * (2.0 + 0.13))] = 38.7 \text{ cm}$$

Ahora continúe con el método de Bhattacharya para estimar N_4 . La Tabla 3.4.1.5 y la Fig. 3.4.1.5 muestran el análisis de Bhattacharya para N_4+ . En este caso es difícil ver una línea recta. Seleccionando los cinco puntos correspondientes a las tallas 37 - 41 cm se obtendría una talla media de 40.0 cm, que es un valor razonable (de hecho, está muy cerca del valor verdadero de 40.2 cm (véase la Tabla 3.2.1), pero se supone que no se tiene esta información).

Llegados a este punto, se debería considerar probablemente que el ajuste de una línea recta es tan malo que el análisis se debe dar por terminado. El momento en que se finaliza es, en gran medida, un problema de gusto, aunque se pueden establecer algunos criterios objetivos para las limitaciones del método de Bhattacharya, como se verá en la Sección 3.5.4. De cualquier modo, se pondrá aquí fin a este ejemplo.

Sesgo

Los datos de entrada para el análisis de Bhattacharya están a menudo sesgados, debido a la selección

TABLA 3.4.1.3

Método de Bhattacharya: Estimación de la tercera cohorte, N3 (cohorte de primavera de 1982). El símbolo “#” en las columnas B, C, G y H indica donde comenzar los cálculos de N3 (véase la Fig. 3.4.1.4)

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1.1-1.2	N3+	ln N3+	Δln N3+	L	Δln N3	ln N3	N3	N4+
25-26	0	-	-	25	-	-	0	0
26-27	0	-	-	26	-	-	0	0
27-28	1.42	0.351	-	27	-	-	1.42	0
28-29	0.94	-0.062	-0.413	28	-	-	0.94	0
29-30	2.36	0.859	0.921	29	-	-	2.36	0
30-31	4.78	1.564	0.705	30*	-	-	4.78	0
31-32	5.16	1.643	0.077	31*	-	-	5.16	0
32-33	7.79#	2.053#	0.412	32*	-	2.053#	7.79#	0
33-34	8.47	2.137	0.084	33*	0.111	2.164	8.71	0
34-35	8.37	2.125	-0.012	34*	-0.032	2.132	8.43	0
35-36	9.77	2.279	0.154	35	-0.175	1.957	7.08	2.69
36-37	10.93	2.392	0.113	36	-0.318	1.639	5.15	5.78
37-38	10	2.303	-0.089	37	-0.460	1.179	3.25	6.75
38-39	10	2.303	0.000	38	-0.603	0.576	1.78	8.22
39-40	11	2.398	0.095	39	-0.746	-0.170	0.84	10.16
40-41	11	2.398	0.000	40	-0.888	-1.058	0.35	10.65
41-42	9	2.197	-0.201	41	-1.031	-2.089	0.12	8.88
42-43	7	1.946	-0.251	42	-1.174	-3.263	0.04	6.96
43-44	7	1.946	0.000	43	-	-	-	7
44-45	5	1.609	-0.337	44	-	-	-	5
45-46	6	1.792	0.183	45	-	-	-	6
46-47	5	1.609	-0.183	46	-	-	-	5
47-48	3	1.099	-0.510	47	-	-	-	3
48-49	2	0.693	-0.406	48	-	-	-	2
49-50	2	0.693	0.000	49	-	-	-	2
50-51	2	0.693	0.000	50	-	-	-	2
51-52	1	0.000	-0.693	51	-	-	-	1

Número total de peces en la cohorte N3: 58.20

*) puntos usados en el análisis de regresión, dando como resultado :

$$a = 4.8196, b = -0.1427, \bar{L}(N3) = -a/b = 33.77, s(N3) = \sqrt{(-dL/b)} = 2.65$$

del arte de pesca y el reclutamiento, es decir, los peces pequeños están poco representados en las muestras de frecuencias, ya sea porque se escapan a través de las mallas, o porque aún no han emigrado de las zonas de cría a los caladeros (véase la Sección 7.1). Los aspectos relacionados con el sesgo causado por la selección se tratarán en el Capítulo 6, donde también se presentará un método para ajustar las muestras de frecuencias de tallas según la selección del arte de pesca. En muchos casos, el análisis de Bhattacharya debería estar precedido de un ajuste motivado por la selección.

En las especies migratorias se observa otra fuente de sesgo. A veces faltan componentes, debido a que la cohorte no estaba presente en el área donde se toman las muestras. Este aspecto se examinará en el Capítulo 11.

Programas de computación

Como se habrá observado, el ejercicio de Bhattacharya toma demasiado tiempo para ser realizado con “papel y lápiz”. En cambio, con ayuda de un computador (que puede ser un microcomputador) este método no es difícil de aplicar en la práctica.

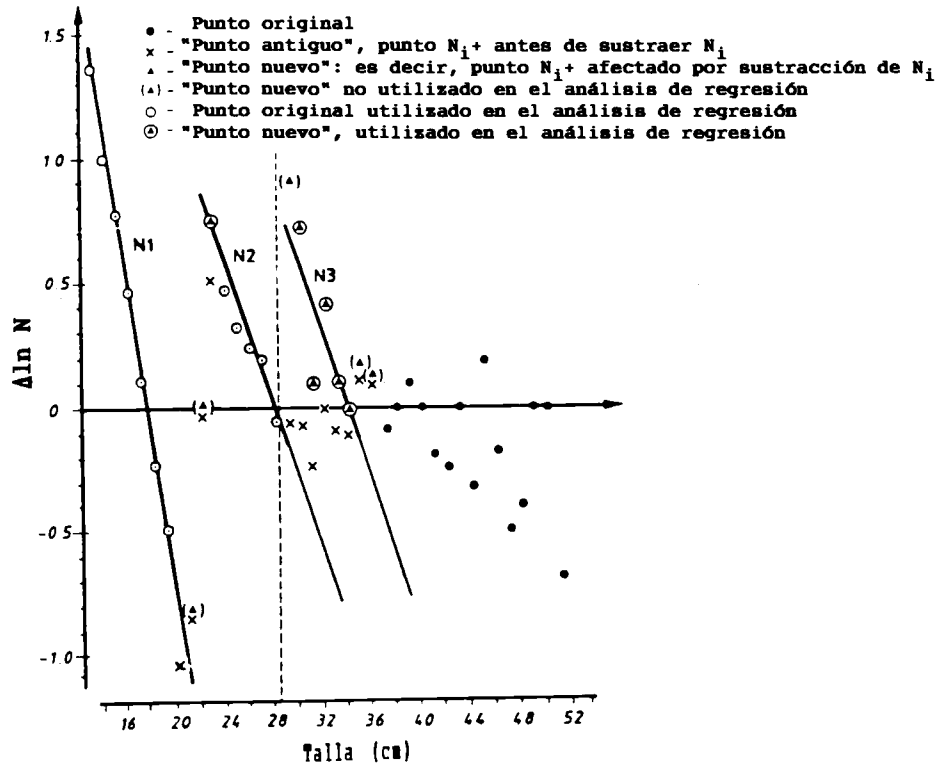


Fig. 3.4.1.4 Método de Bhattacharya: línea de regresión estimada para la tercera cohorte (véanse las columnas D y E de la Tabla 3.4.1.3).

El programa "BHATTAC" del paquete LFSa para microcomputadores (véase el Capítulo 15) sigue muy de cerca el esquema que se explicó más arriba. Con un poco de experiencia se puede hacer el ejercicio de la Sección 3.4.1 con BHATTAC en pocos minutos. Este programa tiene varias ventajas adicionales: cada vez que se ha estimado un componente, BHATTAC muestra en la pantalla un gráfico como el de la Fig. 3.2.2.2, lo que permite evaluar el ajuste a los datos originales. BHATTAC también comprueba si los resultados son razonables o no, calculando el "índice de separación" descrito en la Sección 3.5.4. Tal vez la característica más importante de BHATTAC, en comparación con el método manual, sea que permite realizar el análisis muchas veces, cada vez con un conjunto diferente de datos de entrada. Por ejemplo, se pueden ensayar una serie de formas distintas de ajustar las rectas en el gráfico de Bhattacharya.

Uno de los puntos débiles de la versión efectuada manualmente del método de Bhattacharya, es la estimación del número de peces en cada cohorte, ya que esto se basa en la selección subjetiva de un "punto limpio", a partir del cual se calculan los valores de $\ln N_{i+}$. Una aproximación estadística más rigurosa se lograría aplicando todos los puntos usados para estimar la línea de regresión. De hecho este procedimiento, que es más acertado, se aplica en el programa BHATTAC.

Al efectuar el análisis de Bhattacharya en el computador siempre se deberían ensayar, en forma rutinaria, diferentes tamaños de clases de tallas (véase el Ejercicio 3.4.1), pues a menudo sucede que la disposición ideal de los puntos en el gráfico de Bhattacharya emerge sólo para un tamaño de clase óptimo, que es posible descubrir simplemente probando diversas alternativas. Se pueden obtener mejoras análogas también agrupando los datos de períodos más largos. En la mayoría de los casos se trabajará con series cronológicas de frecuencias de tallas (que se tratarán en la Sección 3.4.2), por ejemplo en forma de frecuencias de tallas mensuales. Entonces se podrá elegir entre trabajar con

TABLA 3.4.1.4
Estimación de K y t_0 mediante el gráfico de
von Bertalanffy usando edades de entrada
arbitrarias y las tallas medias estimadas en
las Tablas 3.4.1.1 a 3.4.1.3
(véase la Tabla 3.3.3.1)

t (x)	$\bar{L}(t)$	$-\ln(1-\bar{L}(t)/50)$ (y)
0.5	17.4	0.428
1.0	27.8	0.812
1.5	33.8	1.127

a (intercepto) = 0.09
b (pendiente) = 0.699, K = 0.7 por año
 $t_0 = -a/b = -0.13$ años

TABLA 3.4.1.5
Método de Bhattacharya: intento para estimar la cuarta cohorte, N4 (la cohorte de otoño de 1981).
Véase la Fig. 3.4.1.5

A	B	C	D	E	F	G	H	I
I.1-L2	N4+	ln N4+	$\Delta \ln N4+$	L	$\Delta \ln N4$	ln N4	N4	N5+
34-35	0	-	-	34	-	-	0	0
35-36	2.69	0.990	0.990	35	?	?	?	?
36-37	5.78	1.754	0.764	36	?	?	?	?
37-38	6.75	1.910	0.156	37(*)	?	?	?	?
38-39	8.22	2.107	0.197	38(*)	?	?	?	?
39-40	10.16	2.318	0.211	39(*)	?	?	?	?
40-41	10.65	2.366	0.048	40(*)	?	?	?	?
41-42	8.88	2.184	-0.184	41(*)	?	?	?	?
42-43	6.96	1.940	-0.244	42	?	?	?	?
43-44	7	1.946	0.006	43	?	?	?	?
44-45	5	1.609	-0.337	44	?	?	?	?
45-46	6	1.792	0.183	45	?	?	?	?
46-47	5	1.609	-0.183	46	?	?	?	?
47-48	3	1.099	-0.510	47	?	?	?	?
48-49	2	0.693	-0.406	48	?	?	?	?
49-50	2	0.693	0.000	49	?	?	?	?
50-51	2	0.693	0.000	50	?	?	?	?
51-52	1	0.000	-0.693	51	?	?	?	?

muestras que representen un mes o agrupar los datos de tres meses para que representen un trimestre del año. Estas agrupaciones de los datos básicos son fáciles de realizar con el computador.

El paquete de programas para microcomputadores "COMPLEAT ELEFAN" contiene el programa "MPA", que realiza también el ejercicio de Bhattacharya. FiSAT contiene el mismo programa.

Así también, Pauly y Caddy (1985) han desarrollado una versión levemente diferente del método de Bhattacharya para utilizarla con calculadoras programables. En esta versión, las líneas están determinadas sólo por tres puntos sucesivos, que se eligen de modo que tengan el más alto

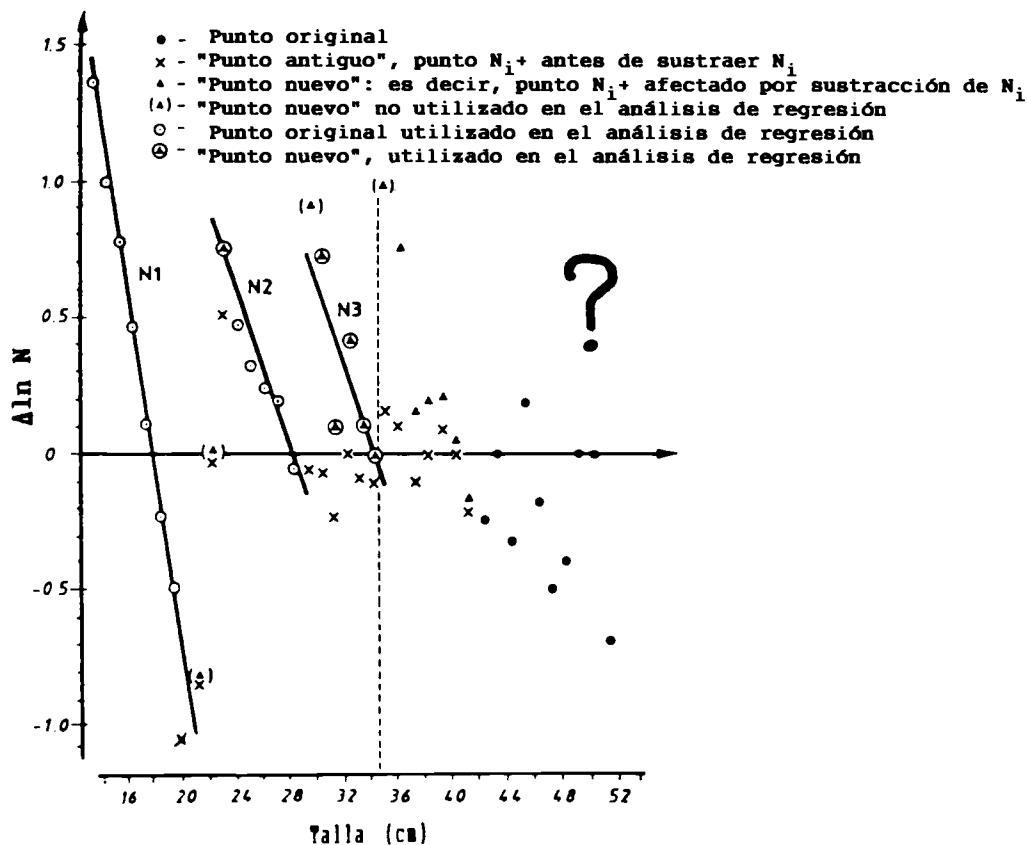


Fig. 3.4.1.5 Método de Bhattacharya: gráfico para la estimación de la cuarta cohorte (véanse las columnas D y E de la Tabla 3.4.1.5). En este caso el ajuste se consideró demasiado dudoso.

coeficiente de correlación negativa. Este constituye un intento por convertir el método de Bhattacharya en un método objetivo, es decir, que produzca resultados en forma independiente de la persona que lo ejecuta.

(Véanse los Ejercicios en la Parte 2).

3.4.2 Análisis de progresión modal

El ejemplo empleado en la sección precedente estaba basado en una muestra de frecuencias de tallas recolectada durante un crucero de prospección pesquera. Anteriormente se demostró que con ese conjunto de datos era posible obtener una estimación aproximada de la ecuación de crecimiento. Así, se pudo estimar el par de parámetros L_{∞} y K , mientras que t_0 sólo pudo ser determinado al asignar edades arbitrarias a las distintas cohortes que componen la distribución.

Ejemplo 11: Análisis de progresión modal, utilizando valores del Ejemplo 4

Suponga ahora que se dispone del tipo de datos descrito en el Ejemplo 4, en la Sección 3.2.1, es decir, muestras de frecuencias de tallas de cada mes o trimestre durante uno o varios años. El ejemplo que se ilustra en la Fig. 3.2.1.1 consiste en 12 muestras de frecuencias de tallas recolectadas en los meses de enero, abril, julio y octubre de tres años (1982 a 1984). Esta serie de tiempo facilita mucho la estimación de los parámetros de crecimiento, en comparación con el caso de una única muestra (octubre, 1983) que se utiliza en la sección anterior.

Si a cada una de las doce muestras se le da el mismo tratamiento que a la muestra de octubre de 1983, los resultados de los doce análisis de Bhattacharya podrían ser los que se presentan en la

Tabla 3.4.2.1. En cada una de las nueve primeras muestras se encontraron tres componentes (como en la Sección 3.4.1), mientras que las tres últimas fueron más difíciles de analizar y sólo se pudieron identificar dos componentes. Téngase presente que el número de componentes (= cohortes) que pudieron ser identificadas es menor que el número efectivamente presente, las cuales están representadas por puntos en la Fig. 3.2.1.1.

En este punto es necesario considerar que las diversas cohortes permanecen en el mar durante algún tiempo y de esta manera son muestreados en diferentes etapas de su crecimiento, desde la época de reclutamiento al área de pesca (o de muestreo) hasta su extinción. También se puede suponer que la talla media de una cohorte determinada, por ejemplo por el método de Bhattacharya, corresponderá a una talla media algo mayor en una muestra tomada algunos meses más tarde y así sucesivamente. Al graficar estas tallas medias de una serie de muestras frente a un eje de tiempo y conectarlas se puede obtener una curva de crecimiento.

En la Fig. 3.4.2.1A las tallas medias de los componentes se representan gráficamente respecto al tiempo, mientras que en la Fig. 3.4.2.1B se han unido las tallas medias que se cree corresponden a las mismas cohortes. Excluyendo los dos primeros y los dos últimos puntos, se han identificado así seis cohortes. La unión de los puntos para producir cohortes es un proceso subjetivo, aunque en este caso la elección resultó muy fácil. En la práctica puede que no sea siempre tan sencillo como en el ejemplo.

De la Fig. 3.4.2.1B se desprende que hay dos cohortes por año, por ejemplo las cohortes N^o3 y N^o4 reclutadas en 1982. Suponiendo que sean estaciones del hemisferio norte, se denominará como N^o3 a la cohorte de primavera de 1982 y como N^o4 a la cohorte de otoño. Las numerosas curvas de crecimiento dibujadas para cada cohorte permiten interpretar y reorganizar los resultados de los doce análisis de Bhattacharya por cohortes (Tabla 3.4.2.1), como se muestra en la Tabla 3.4.2.2.

Estimación de K y L_∞

El tipo de datos incluido en la Tabla 3.4.2.2 permite aplicar el gráfico de Gulland y Holt (véase la Sección 3.3.1) calculando:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L(t+\Delta t) - L(t)}{(t+\Delta t) - t}$$

y

TABLA 3.4.2.1
Resultados del análisis de Battacharya con las muestras mensuales
de frecuencias de tallas ilustradas en la Fig. 3.2.1.1

fecha de la muestra	tercera componente	segunda componente	primera componente
ENE 82	27.9	23.5	9.8
ABR 82	32.0	28.1	16.5
JUL 82	31.8	23.1	8.0
OCT 82	34.6	28.0	15.3
ENE 83	32.0	21.8	10.0
ABR 83	35.1	27.0	16.5
JUL 83	30.9	23.5	9.2
OCT 83 *)	33.8	27.8	17.4
ENE 84	32.9	24.0	8.3
ABR 84	-	28.2	16.8
JUL 84	-	22.9	9.0
OCT 84	-	27.9	18.0

*) de la Tabla 3.4.1.4.

$$\bar{L}(t,t+\Delta t) = \frac{L(t)+L(t+\Delta t)}{2}$$

La diferencia de tiempo $\Delta t = 0.25$ años permanece constante en este caso, por lo tanto, es posible aplicar el método de Chapman (Ec. 3.3.2.2).

Los valores de $\Delta L/\Delta t$ y $\bar{L}(t,t+\Delta t)$ se consignan en la Tabla 3.4.2.3. Para ilustrar los cálculos se considerará la cohorte N°1, reclutada en la primavera de 1981 (véase la Fig. 3.4.2.1). Para las dos primeras muestras se obtiene:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L(\text{abr } 82) - L(\text{ene } 82)}{t(\text{abr } 82) - t(\text{ene } 82)} = \frac{28.1 - 23.5}{0.25} = 18.4$$

y,

$$\bar{L}(\text{ene } 82, \text{abr } 82) = \frac{L(\text{ene } 82) + L(\text{abr } 82)}{2} = (23.5 + 28.1)/2 = 25.8$$

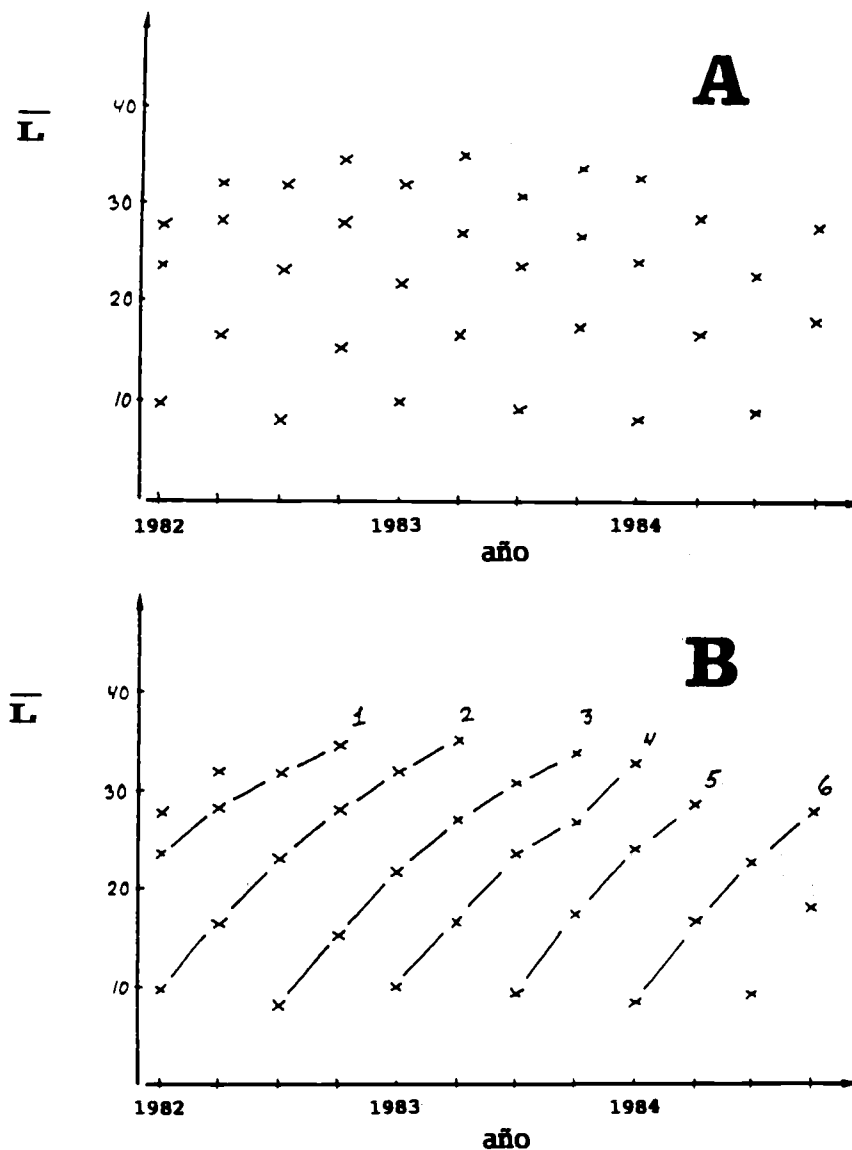


Fig. 3.4.2.1 Progresión modal basada en los resultados de los análisis de Bhattacharya.
 A: Tallas medias de los componentes del gráfico de Bhattacharya.
 B: Tallas medias unidas para representar las curvas de crecimiento de posibles cohortes.

TABLA 3.4.2.2
Tallas medias de las componentes establecidas en las muestras de la Tabla 3.4.2.1,
reagrupadas en cohortes (véase la Fig. 3.2.1.1)

fecha de la muestra	COHORTE, $\bar{L}(t)$ en cm					
	1	2	3	4	5	6
	primavera 1981	otoño 1981	primavera 1982	otoño 1982	primavera 1983	otoño 1983
ENE 82	23.5	9.8	-	-	-	-
ABR 82	28.1	16.5	-	-	-	-
JUL 82	31.8	23.1	8.0	-	-	-
OCT 82	34.6	28.0	15.3	-	-	-
ENE 83	-	32.0	21.8	10.0	-	-
APR 83	-	35.1	27.0	16.5	-	-
JUL 83	-	-	30.9	23.5	9.2	-
OCT 83	-	-	33.8	27.8	17.4	-
ENE 84	-	-	-	32.9	24.0	8.3
ABR 84	-	-	-	-	28.2	16.8
JUL 84	-	-	-	-	-	22.9
OCT 84	-	-	-	-	-	27.9

También sería posible efectuar el gráfico de Gulland y Holt para cada una de las seis cohortes, con sólo dos a cuatro puntos para cada una de ellas. No obstante, bajo el supuesto que los parámetros de crecimiento permanecen constantes durante el período completo de muestreo, los 23 pares de puntos que se entregan en la Tabla 3.4.2.3 pueden ser combinados en un solo gráfico de Gulland y Holt.

La regresión de los 23 valores $\Delta L/\Delta t$ graficados sobre los valores $\bar{L}(t, t+\Delta t)$ da los siguientes resultados:

$$a \text{ (intercepto)} = 41.84 \quad \text{y} \quad b \text{ (pendiente)} = -0.8740$$

de los que se obtienen:

$$L_{\infty} = -a/b = 47.9, \text{ vale decir } 48 \text{ cm}$$

y,

$K = -b = 0.87$ por año, con intervalo de confianza de K al 95% igual a $[0.72, 1.02]$ (véase la Tabla 3.4.2.3).

El gráfico de Gulland y Holt se muestra en la Fig. 3.4.2.2. Los estimados de L_{∞} y K se obtuvieron considerando todos los registros de la serie de tiempo.

Estimación de t_0

El paso siguiente es estimar los parámetros de condición inicial de t_{01} , para las cohortes de primavera y t_{02} para las cohortes de otoño, empleando para ello el gráfico de von Bertalanffy. Con este fin, se asigna a la cohorte de primavera de 1981 una edad arbitraria de un año en enero de 1982, de 1.25 años en abril de 1982, etc. De la misma manera, la cohorte de primavera de 1982 tendrá un año en enero de 1983, etc. Para las cohortes de otoño se aplica el mismo procedimiento.

La Tabla 3.4.2.4 contiene las edades arbitrarias $t(i)$ de cada cohorte, junto con la variable dependiente del gráfico de von Bertalanffy:

$$y = -\ln(1 - \bar{L}(t)/L_{\infty})$$

TABLA 3.4.2.3
Datos de entrada y análisis de regresión para el gráfico de Gulland and Holt derivados de la
Tabla 3.4.2.2. Nótese que $\Delta t = 0.25$ años.

fecha de la muestra	cohorte											
	primavera 1981		otoño 1981		primavera 1982		otoño 1982		primavera 1983		otoño 1983	
	\bar{L}	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$	\bar{L}	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$	\bar{L}	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$	\bar{L}	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$	\bar{L}	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$	\bar{L}	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$
ENE 82	25.8	18.4	13.2	26.8	-	-	-	-	-	-	-	-
ABR 82	30.0	14.8	19.8	26.4	-	-	-	-	-	-	-	-
JUL 82	33.2	11.2	25.6	19.6	11.7	29.2	-	-	-	-	-	-
OCT 82	-	-	30.0	16.0	18.6	26.0	-	-	-	-	-	-
ENE 83	-	-	33.6	12.4	24.4	20.8	13.3	26.0	-	-	-	-
ABR 83	-	-	-	-	29.0	15.6	20.0	28.0	-	-	-	-
JUL 83	-	-	-	-	32.4	11.6	25.7	17.2	13.3	32.8	-	-
OCT 83	-	-	-	-	-	-	30.4	20.4	20.7	26.4	-	-
ENE 84	-	-	-	-	-	-	-	-	26.1	16.8	12.6	34.0
ABR 84	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20.0	24.4
JUL 84	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25.4	20.0
OCT 84	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

$$a = 41.84 \quad b = -0.8740$$

$$sb^2 = \frac{1}{n-2} * ((sy/sx)^2 - b^2) =$$

$$\frac{1}{23-2} * ((6.62333/7.08467)^2 - (-0.8740)^2) = 0.005242$$

$$K = -b = 0.87 \text{ por año, } L_{\infty} = -a/b = 47.9 \text{ cm}$$

$$sb = 0.072, t_{21} = 2.09 \text{ (véase la Tabla 2.3.1)}$$

intervalo de confianza al 95% de b (= -K): [-1.02 , -0.72]

intervalo de confianza al 95% de K: [0.72 , 1.02]

Los valores de $\bar{L}(t)$ se toman de la Tabla 3.4.2.2. Hay dos análisis de regresión que resolver:

$$\text{Cohortes de primavera} : y = -K*t_{o1} + K*t(i) , i = 1, 3, 5$$

$$\text{Cohortes de otoño} : y = -K*t_{o2} + K*t(i) , i = 2, 4, 6$$

donde $t(i)$, la variable independiente, es la edad arbitraria de la cohorte $n^{\circ}i$, definida en la Tabla 3.4.2.4. En este caso se consideran seis cohortes simultáneamente, y se cree que hay tres cohortes de primavera y tres de otoño.

Los dos análisis de regresión dieron los siguientes resultados:

	a (intercepto)	b (pendiente)	$t_{01} = -a/b$ (años)	K (por año)
Cohortes de primavera	-0.2055	0.8433	0.24	0.84
Cohortes de otoño	-0.7305	0.9169	0.80	0.92

Tal como se preveía, la diferencia entre t_{01} y t_{02} es de casi medio año, como se explicó para este ejemplo en la Sección 3.2.1 (véase la Tabla 3.2.1.2). La media de los dos valores K (pendientes) es 0.88 (que se aproxima al valor 0.87 calculado a partir del gráfico de Gulland y Holt). Una prueba estadística demostraría que estas estimaciones no son significativamente diferentes, por lo que se usaría el valor común $K = 0.88$ por año. Así pues, las dos ecuaciones:

$$\text{Cohortes de primavera} : L(t) = 48*[1 - \exp(-0.88(t-0.24))]$$

$$\text{Cohortes de otoño} : L(t) = 48*[1 - \exp(-0.88(t-0.80))]$$

se pueden utilizar para calcular la talla de las cohortes de primavera y de otoño con diferentes edades, asignadas en forma arbitraria. El análisis se puede interrumpir en esta fase, o bien continuarlo, tratando de estimar las fechas de nacimiento de las cohortes.

Estimación de la fecha de nacimiento

Para estimar las fechas de nacimiento, se extrapola la curva de crecimiento más allá del primer dato y se ve dónde se intersecta con el eje del tiempo, como se ilustra en la Fig. 3.4.2.4. Esta figura muestra el ejemplo de la cohorte n°3. La curva corta el eje del tiempo en el punto 1982.24. El punto de intersección en el eje de edad arbitraria es $t_{01} = 0.24$. El punto 1982.24 (29 de marzo) debe estar cerca de la fecha de nacimiento. Esta es una aproximación, puesto que la curva de crecimiento de von Bertalanffy no se ajusta a los primeros años de vida de los peces (véase la Sección 3.1). Otra opción

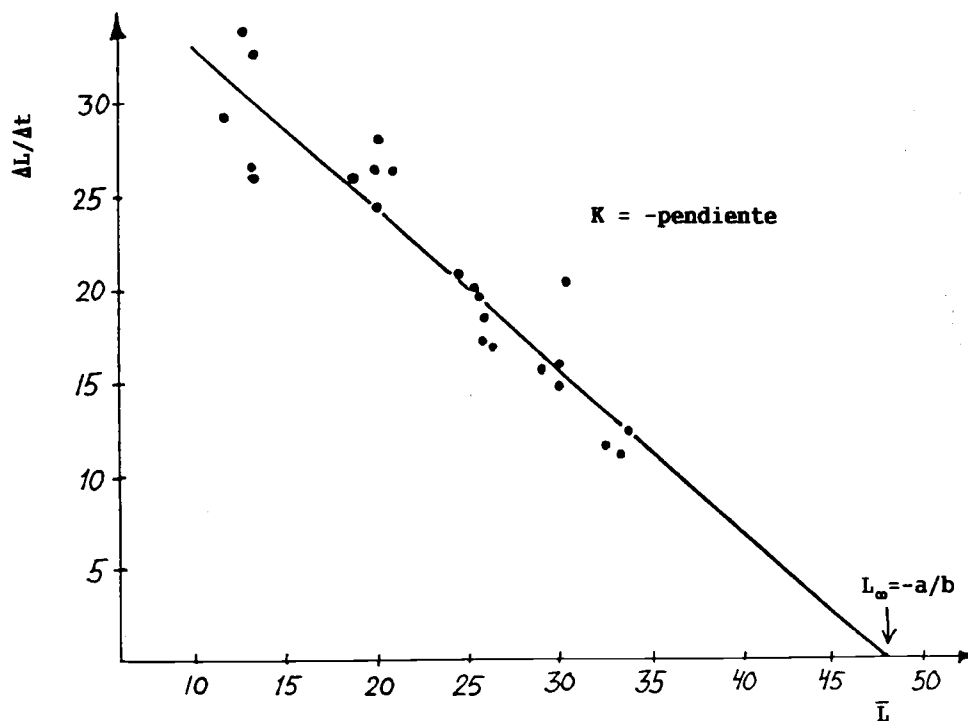


Fig. 3.4.2.2 Gráfico de Gulland y Holt al emplear los datos de la Tabla 3.4.2.3.

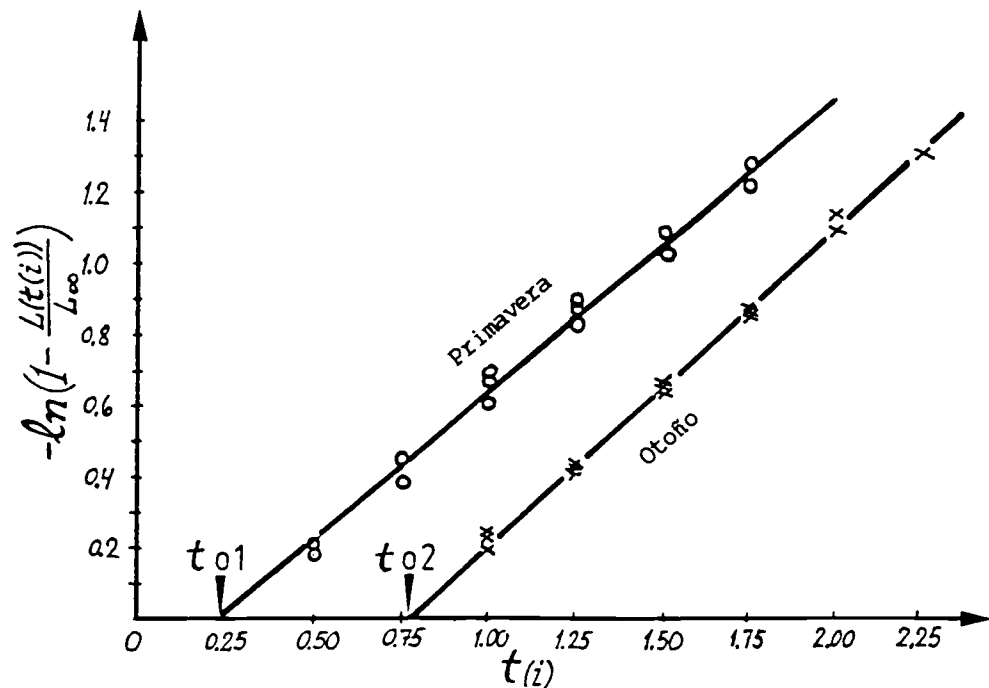


Fig. 3.4.2.3 Dos gráficos de von Bertalanffy basados en los datos de la Tabla 3.4.2.4.

para determinar en forma aproximada la fecha de nacimiento es utilizando datos de maduración gonadal.

Utilización de datos de madurez gonadal

Otro método para estimar la fecha de nacimiento es calcular la temporada de desove a partir de las etapas de maduración que presentan los adultos. La Fig. 3.4.2.5 ilustra un ejemplo de datos de las diferentes etapas de madurez (Wyatt, 1983). En este caso se presentan los porcentajes de las tres principales etapas de la maduración gonadal.

A partir de los datos de la fase de madurez, por ejemplo, un gráfico del porcentaje de peces maduros, se puede definir un (o dos) día(s) medio(s) de desove, del mismo modo que se definió el día medio de reclutamiento en el Capítulo 1, si el gráfico es unimodal (o bimodal). El histograma para el porcentaje de peces maduros de la Fig. 3.4.2.5, se puede interpretar como dos temporadas de desove con máximos en febrero y octubre. Así, se puede utilizar el día medio de desove como una estimación de la fecha de nacimiento (tal vez corregida para un período de tiempo posterior). Sin embargo, los resultados de este análisis se deben tratar con una cierta reserva, ya que las fluctuaciones en el desove no son el único factor para determinar las fluctuaciones en el reclutamiento. El éxito de una larva para alimentarse y crecer hasta convertirse en un recluta y al mismo tiempo evitar ser comida por predadores es un proceso complejo afectado por una variedad de factores ambientales (bióticos y abióticos). El rango de sobrevivencia podría, por ejemplo, ser casi nulo en una temporada de desove y muy alto en otra. Una discusión de estos asuntos aparece, por ejemplo, en Bakun *et al.* (1982).

Aplicación del análisis de progresión modal

Las estimaciones obtenidas al seguir la progresión de las modas (= cohortes), en las distribuciones de frecuencias de tallas, se considera superior al método basado en una única muestra (Sección 3.4.1). Además, hay casos en que el método de una sola muestra no es aplicable, por ejemplo, para las especies de vida corta donde sólo hay una o dos cohortes en la muestra de frecuencias de tallas. Este ejemplo se ilustra en la Fig. 3.4.2.6, en relación con las capturas comerciales del camarón *Penaeus*

TABLA 3.4.2.4
Datos de entrada y análisis de regresión para el gráfico de von Bertalanffy.
Tallas medias de las componentes $\bar{L}(t)$, derivadas de la Tabla 3.4.2.2.
 $L_{\infty} = 48 \text{ cm}$

A: cohortes de primavera								
fecha de la muestra	Nº1 primavera 1981		Nº3 primavera 1982		Nº5 primavera 1983		período de muestreo T = (x)	
	t(1)	y*	t(3)	y*	t(5)	y*		
ENE 82	1.00	0.673	-	-	-	-	1982.00	
ABR 82	1.25	0.880	-	-	-	-	1982.25	
JUL 82	1.50	1.086	0.50	0.182	-	-	1982.50	
OCT 82	1.75	1.276	0.75	0.384	-	-	1982.75	
ENE 83	-	-	1.00	0.605	-	-	1983.00	
ABR 83	-	-	1.25	0.827	-	-	1983.25	
JUL 83	-	-	1.50	1.032	0.50	0.213	1983.50	
OCT 83	-	-	1.75	1.218	0.75	0.450	1983.75	
ENE 84	-	-	-	-	1.00	0.693	1984.00	
ABR 84	-	-	-	-	1.25	0.886	1984.25	
JUL 84	-	-	-	-	-	-	1984.50	
OCT 84	-	-	-	-	-	-	1984.75	

cohortes de primavera: n = 14

a = -0.2055, b = 0.8433 por lo que K = 0.84 por año

t₀₁ = -a/b = 0.24 años

$$sb^2 = \frac{1}{n-2} * [(sy/sx)^2 - b^2] = \frac{1}{14-2} * [(0.35016/0.41313)^2 - 0.84332^2] = 0.0006005$$

sb = 0.0245, t₁₂ = 2.18 (véase la Tabla 2.3.1)

intervalo de confianza al 95% de b (= K): [0.79 , 0.90]

*) y = -ln(1 - $\bar{L}(t)/L_{\infty}$)

B: cohortes de otoño								
fecha de la muestra	Nº2 otoño 1981		Nº4 otoño 1982		Nº6 otoño 1983		período de muestreo T = (x)	
	t(2)	y*	t(4)	y*	t(6)	y*		
ENE 82	1.00	0.228	-	-	-	-	1982.00	
ABR 82	1.25	0.241	-	-	-	-	1982.25	
JUL 82	1.50	0.656	-	-	-	-	1982.50	
OCT 82	1.75	0.875	-	-	-	-	1982.75	
ENE 83	2.00	1.099	1.00	0.234	-	-	1983.00	
ABR 83	2.25	1.314	1.25	0.421	-	-	1983.25	
JUL 83	-	-	1.50	0.673	-	-	1983.50	
OCT 83	-	-	1.75	0.866	-	-	1983.75	
ENE 84	-	-	2.00	1.157	1.00	0.190	1984.00	
ABR 84	-	-	-	-	1.25	0.431	1984.25	
JUL 84	-	-	-	-	1.50	0.648	1984.50	
OCT 84	-	-	-	-	1.75	0.870	1984.75	

cohortes de otoño: n = 15

a = -0.7305, b = 0.9169, por lo que K = 0.92 por año

t₀₂ = -a/b = 0.80 años

$$sb^2 = \frac{1}{n-2} * [(sy/sx)^2 - b^2] = \frac{1}{15-2} * [(0.36593/0.39491)^2 - 0.91692^2] = 0.0001375$$

sb = 0.037, t₁₃ = 2.16 (véase la Tabla 2.3.1)

intervalo de confianza al 95% de b (= K): [0.84 , 1.00]

*) y = -ln(1 - $\bar{L}(t)/L_{\infty}$)

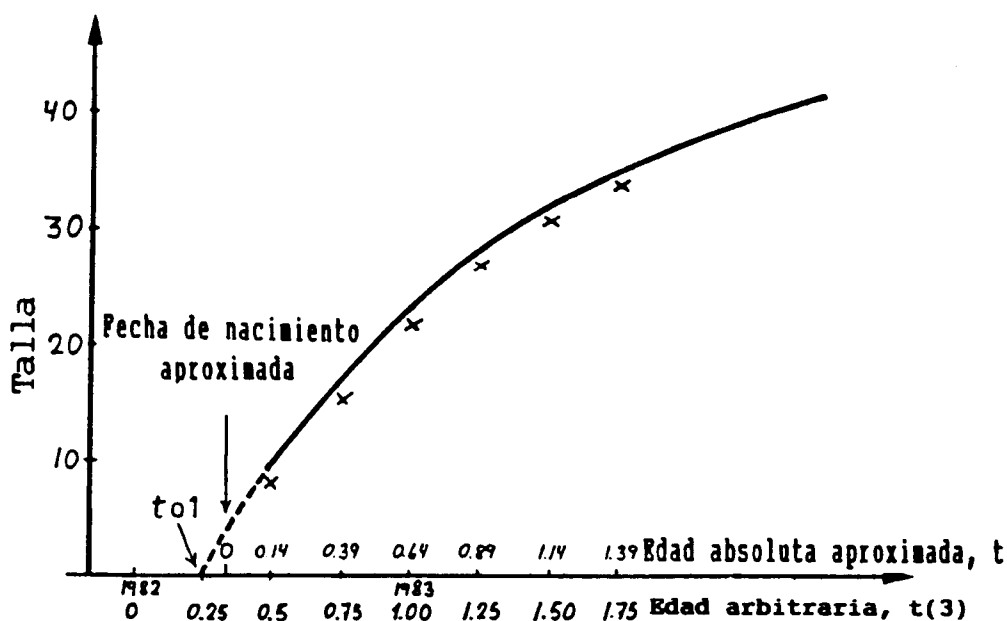


Fig. 3.4.2.4 Ilustración de cómo se estima en forma aproximada la fecha de nacimiento.

semisulcatus en aguas de Kuwait (Mohamed *et al.*, 1979). Esta especie tiene una vida máxima de uno a dos años y hay dos cohortes por año. La mayoría de las muestras contienen sólo una moda, de manera que el método de una sola muestra no es aplicable. En cambio, en este caso parece ser fácil seguir la progresión de las modas. El análisis de progresión modal es especialmente útil para este tipo de especies de vida corta.

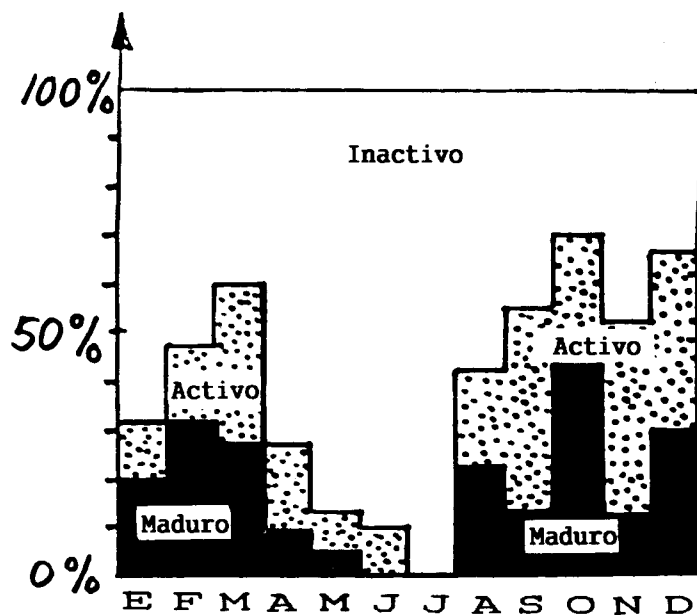


Fig. 3.4.2.5 Estados de maduración observados en *Holocentrus rufus* (Wyatt, 1983). Basado en una muestra de 1331 peces.

Programas computacionales

El programa "MODALPR" del paquete LFSA (Sparre, 1987, Capítulo 15) puede realizar el análisis de progresión modal arriba descrito. El paquete LFSA también permite continuar desde el análisis de Bhattacharya (programa "BHATTAC") con una estimación por mínimos cuadrados de los parámetros de crecimiento (programa "VONBER", véase la Sección 3.3.4), en vez del gráfico de Gulland y Holt. El paquete "COMPLEAT ELEFAN" (Gayanilo *et al.*, 1988) contiene el programa "MPA" para el análisis de progresión modal. En el programa FiSAT se ha incorporado un módulo semejante al descrito para realizar este análisis. Así también, existen varios otros programas para computadoras que intentan resolver el problema abordado en esta sección; algunos de ellos se examinarán en la Sección 3.5.

Manipulación de datos

Al ejecutar en un computador el análisis de Bhattacharya y el análisis de progresión modal, siempre se deberían ensayar, como proceso rutinario, distintas agrupaciones efectuadas con los datos disponibles, es decir, realizando lo que se llama *manipulación de datos* ("data-massage") o compresión de

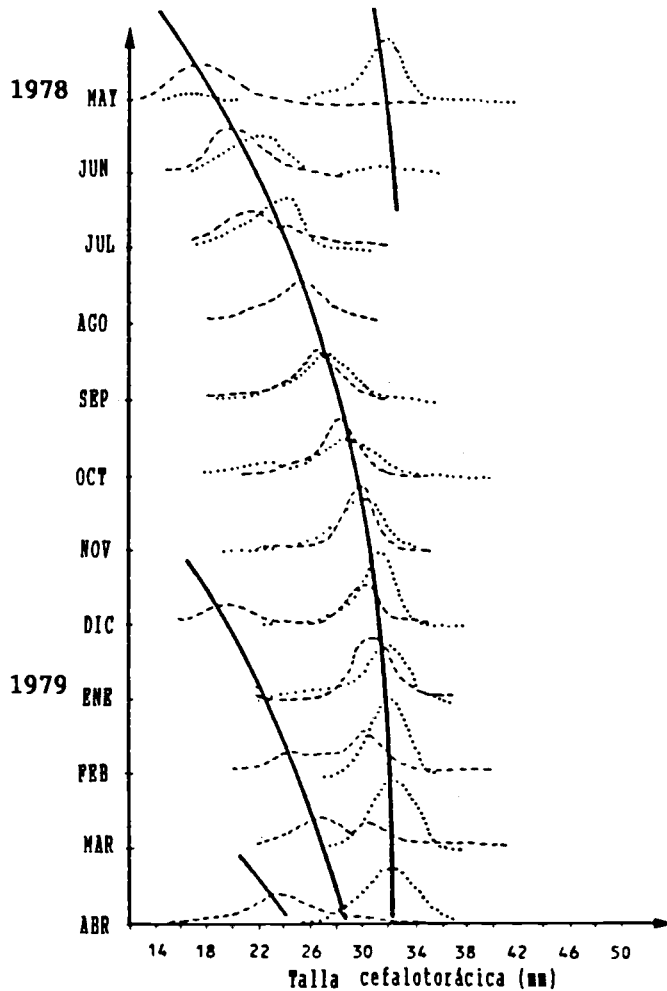


Fig. 3.4.2.6 Ejemplo del análisis de progresión modal. Distribuciones de tallas de *Penaeus semisulcatus*, de capturas artesanales (-----) e industriales (....), en aguas de Kuwait. (Mohamed *et al.*, 1979).

datos (“data-squeezing”). La Tabla 3.4.2.5 ilustra el proceso de manipulación de datos. La parte A contiene los datos originales, es decir, una serie de tiempo de 14 muestras de frecuencias de tallas mensuales agrupadas en 16 grupos de 1 cm. De la parte A a la parte B los datos se han comprimido a 8 grupos de tallas de dos cm. De la parte B a la parte C los datos se han comprimido nuevamente a 5 grupos de tres meses. A veces la compresión de los datos pone en evidencia la estructura de éstos. (Por “estructura” se entienden las líneas rectas en los gráficos de Bhattacharya y la progresión modal).

Si los datos están agrupados en clases tan pequeñas que el “ruido aleatorio” dentro de cada celda de la Tabla oculta la estructura de los datos, hay que reagruparlos. También se puede tropezar con el problema opuesto, es decir que los datos estén agrupados en intervalos de clases tan grandes que la estructura quede disimulada por la agrupación. Si los datos básicos están agrupados en intervalos de clases demasiado grandes (en talla o en tiempo) no se puede hacer nada para resolver el problema. Por consiguiente, los datos básicos se deberían registrar siempre en los grupos más pequeños que las consideraciones prácticas permitan. Por ejemplo, si está indeciso acerca de si usar grupos de 1 cm o de 2 cm, utilice los grupos de 1 cm. Estos se pueden convertir fácilmente a grupos de 2 cm, mientras que la transformación opuesta no es posible. La agrupación de datos tiene que ser a menudo “justo la correcta” para que se pueda llevar a cabo un análisis de Bhattacharya/progresión modal.

(Véanse los **Ejercicios** en la Parte 2).

3.4.3 El método del papel de probabilidad y el método de la parábola

Existen otras formas de analizar las distribuciones normales compuestas que, al igual que el análisis de Bhattacharya, son básicamente métodos manuales y tienen un cierto grado de subjetividad.

Uno es el método del papel de probabilidad introducido por Harding (1949) y desarrollado posteriormente por Cassie (1954). Este se basa en el hecho de que una distribución normal se convierte en lineal cuando se representa gráficamente en papel de probabilidad. La combinación de varias distribuciones normales proporciona una línea más compleja con ciertos puntos de inflexión. Al igual que en el método de Bhattacharya, las distribuciones normales se pueden extraer una por una.

Otro método es el de la parábola, introducido por Hald (1952) y usado en investigaciones pesqueras por Tanaka (1953). La base matemática es la transformación de una distribución normal en una parábola empleando logaritmos (véase en la Sección 2.6, la Ec. 2.6.3). En este método se ajustan parábolas a las transformaciones logarítmicas de los datos de frecuencias de tallas compuestas. Por lo demás, el procedimiento es el mismo que el utilizado en el método de Bhattacharya, que es una versión más elaborada, basada en el hecho de que las diferencias entre puntos equidistantes de una parábola forman una línea recta.

El método de Bhattacharya exige menos decisiones subjetivas de parte del investigador que otros métodos. Sin embargo, las personas diestras en la aplicación del método del papel de probabilidades o en el de la parábola también parecen conseguir resultados plausibles.

3.5 DETERMINACION DE CURVAS DE CRECIMIENTO MEDIANTE PROGRAMAS COMPUTACIONALES

Los métodos presentados en la Sección 3.4, los denominados métodos de “lápiz y papel” y los programas computacionales equivalentes, emplean básicamente los datos muestra por muestra. En muchos casos, el trazado de las curvas de crecimiento resulta más fácil si se considera la serie de tiempo completa. Algunas muestras se pueden descomponer fácilmente para determinar las cohortes que las componen e interpretar sin ambigüedades su crecimiento. Utilizando los resultados de muestras “fáciles”, es posible hacer también interpretaciones inequívocas de muestras que de otro modo no se sabría como interpretar.

Las Fig. 3.5.0.1 y 3.5.0.2 ilustran esta característica. La muestra de enero, en la Fig. 3.5.0.1, parece fácil de resolver en dos componentes, como se puede ver en la Fig. 3.5.0.2, mientras que la muestra de septiembre no presenta ningún tipo de estructura. La de mayo parece más complicada que la de enero, pero se puede interpretar. Juntas, las muestras de mayo y enero presentan un cuadro claro, que permite estimar una curva de crecimiento. Si se extrapola la curva de crecimiento a la muestra de septiembre, se puede dividir también esta última en cohortes.

Este enfoque se puede aplicar cuando se usa el método manual, especialmente si se cuenta con la ayuda de un computador. Pero también se puede descargar más trabajo en el computador y dejar que realice el análisis con una técnica más elaborada (por ejemplo, la estimación de mínimos cuadrados; véase la Sección 3.3.4).

Los métodos computarizados que se abordan aquí requieren tantos cálculos que es casi imposible realizarlos "con papel y lápiz". A continuación se presentan dos métodos opcionales:

1. El método "ELEFAN I" (Electronic Length Frequency ANalysis: Análisis Electrónico de Frecuencias de Tallas)
2. El método de "máxima verosimilitud".

El primero de ellos fue introducido por Pauly y David (1981). El segundo se puede considerar como una versión computarizada del método de Bhattacharya. Este último se basa en la teoría tradicional del análisis estadístico de muestras de frecuencias, método que se puede considerar como una versión generalizada del análisis de regresión lineal. Los principios básicos en que se fundamentan estos dos métodos son parecidos.

Un examen detallado de los métodos computarizados caería fuera del ámbito de este manual. La intención de este manual es presentar algunas características básicas de estos métodos, con la esperanza de que animen al lector a emprender estudios más a fondo acerca de esta temática.

3.5.1 Programa computacional ELEFAN I

El programa "ELEFAN I" realiza estimaciones de parámetros de crecimiento mediante el análisis de frecuencias de tallas (Pauly y David, 1981; y Pauly, 1987).

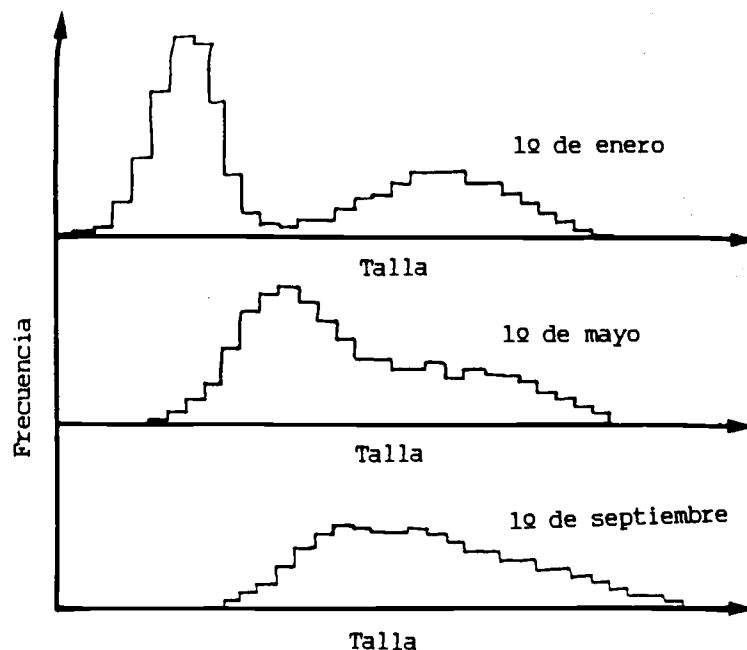


Fig. 3.5.0.1 Ejemplo de una muestra "fácil" (enero) y de una muestra "difícil" (septiembre).

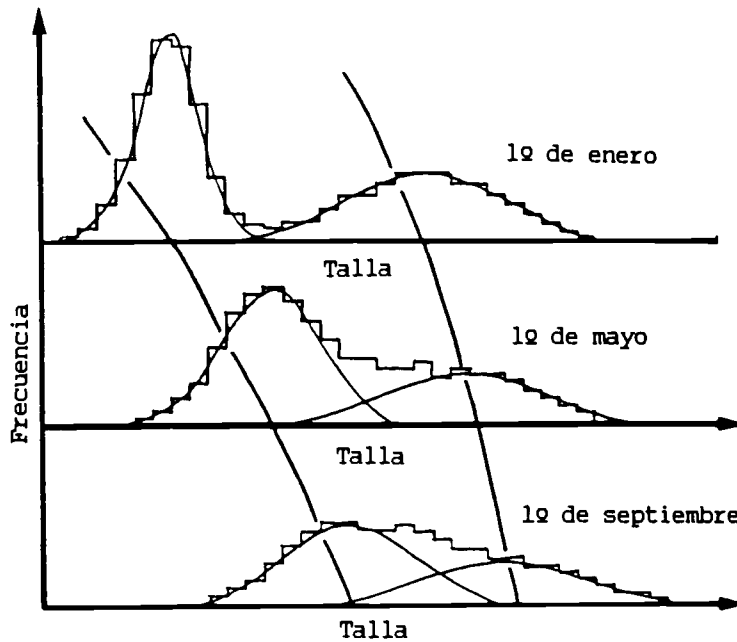


Fig. 3.5.0.2 Ejemplo hipotético de cómo se usa una muestra “fácil” (enero) para interpretar una muestra “difícil” (septiembre).

Ejemplo 12: Aplicación del programa ELEGAN I a los datos de *Plectropomus leopardus*

Para ilustrar el ELEGAN I se utilizarán los datos que aparecen en la Fig. 3.4.0.2. El ELEGAN I consta de dos etapas principales:

- Etapla 1: Reestructuración de las frecuencias de tallas
- Etapla 2: Ajuste de una curva de crecimiento

ETAPA 1:

El proceso de reestructuración de las frecuencias de tallas se ilustra en la Fig. 3.5.1.1, donde la parte “a” muestra los datos originales presentados por Goeden (1978), agrupados en intervalos de tallas de 0.5 cm. Para atenuar pequeñas irregularidades, los datos se han reordenado en grupos de tallas de 2 cm, resultado que se presenta en la parte “b”. La curva de la parte “b” es la frecuencia obtenida mediante promedios móviles con 5 grupos. El método utilizado para obtener los promedios móviles se ilustra a continuación, donde se indica el valor correspondiente al intervalo de tallas de 26 - 28 cm:

<i>intervalo</i>	<i>frecuencia</i>	
18-20	0*	
20-22	0*	
22-24	2	} promedio móvil = $\frac{2+11+15+6+10}{5} = 8.8$
24-26	11	
26-28	15	
28-30	6	
30-32	10	
.....		

Los promedios móviles correspondientes a los primeros grupos de tallas presentes en la distribución (22 - 24 y 24 - 26 cm) se calculan añadiendo a los dos grupos de tallas precedentes valores cero como

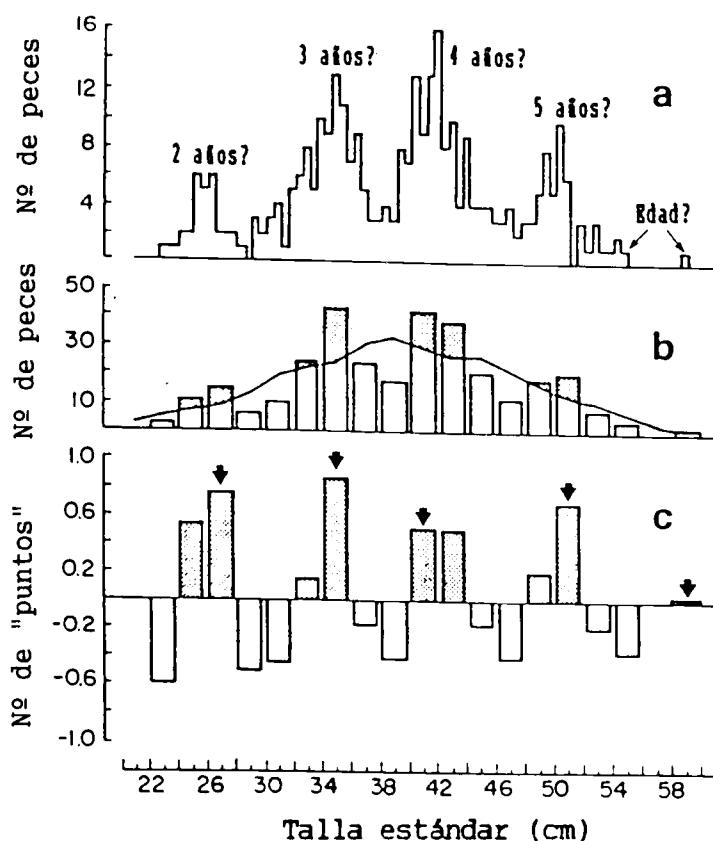


Fig. 3.5.1.1 Ejemplo del ELEFAN I en la reestructuración de una muestra de frecuencias de tallas (Pauly y David, 1981). Datos de Goeden (1978), para *Plectropomus leopardus*.

frecuencia, los que se indican con "*" en el listado anterior. (Para los últimos grupos de tallas se aplica el mismo procedimiento). Esta curva sirve para destacar los máximos (barras sombreadas por sobre el promedio móvil) y los mínimos entre ellos. En la parte "c" las frecuencias originales de la parte "b" se han dividido por el promedio móvil y se les ha restado 1. De esta manera, tómesese nuevamente como ejemplo el grupo de tallas 26 - 28 cm. Aquí se obtiene:

$$15/8.8 - 1 = 0.7 \text{ "puntos"}$$

En realidad se han efectuado también algunos otros ajustes menores, pero no serán tratados aquí. Usando el proceso de reestructuración, ya indicado, los máximos y los mínimos intermedios quedan bien estructurados y fáciles de identificar mediante los "puntos" asignados. Observe que los máximos clarificados han recibido un número similar de puntos, sin tener en cuenta el número de peces que representan.

ETAPA 2:

El ajuste de la curva de crecimiento, se ilustra en las Figs. 3.5.1.2 y 3.5.1.3.

En el ejemplo para *Plectropomus leopardus* se utilizó sólo una muestra. Para el ajuste de las curvas de crecimiento del tipo que realiza ELEFAN I es preferible tener una serie de tiempo de muestras. Básicamente, ELEFAN I es un análisis de progresión modal. No obstante, si no se dispone de una serie de muestreos en el tiempo, el problema se puede obviar simulándola, lo que se logra repitiendo simplemente la muestra para un recorrido adecuado de años, en el supuesto de que todas las cohortes siguen la misma curva de crecimiento. Así pues, ELEFAN I sirve tanto para el caso de una sola muestra como para una serie de tiempo.

Si la serie de tiempo de diez años, presentada en la Fig. 3.5.1.2, hubiese sido una serie real, se habrían obtenido frecuencias levemente diferentes para cada año. La Fig. 3.5.1.3 muestra ocho repeticiones de la muestra reestructurada dispuestas de forma parecida a la Fig. 3.5.1.2. En esta última figura es difícil ajustar una curva a las frecuencias originales y no es posible juzgar objetivamente si una curva se ajusta mejor que la otra, al efectuar “un ajuste a ojo”. En cambio, las muestras reestructuradas de la Fig. 3.5.1.3 son más fáciles de ajustar, debido a que los máximos y los mínimos se han exagerado.

Con los datos reestructurados (los “puntos” mostrados en la Fig. 3.5.1.1c) es posible definir una medida objetiva de la bondad del ajuste, para la cual Pauly y David (1981) propusieron la relación “SME/SMD”, donde “SME” representa la “suma de máximos explicada” y “SMD” la “suma de máximos disponible”.

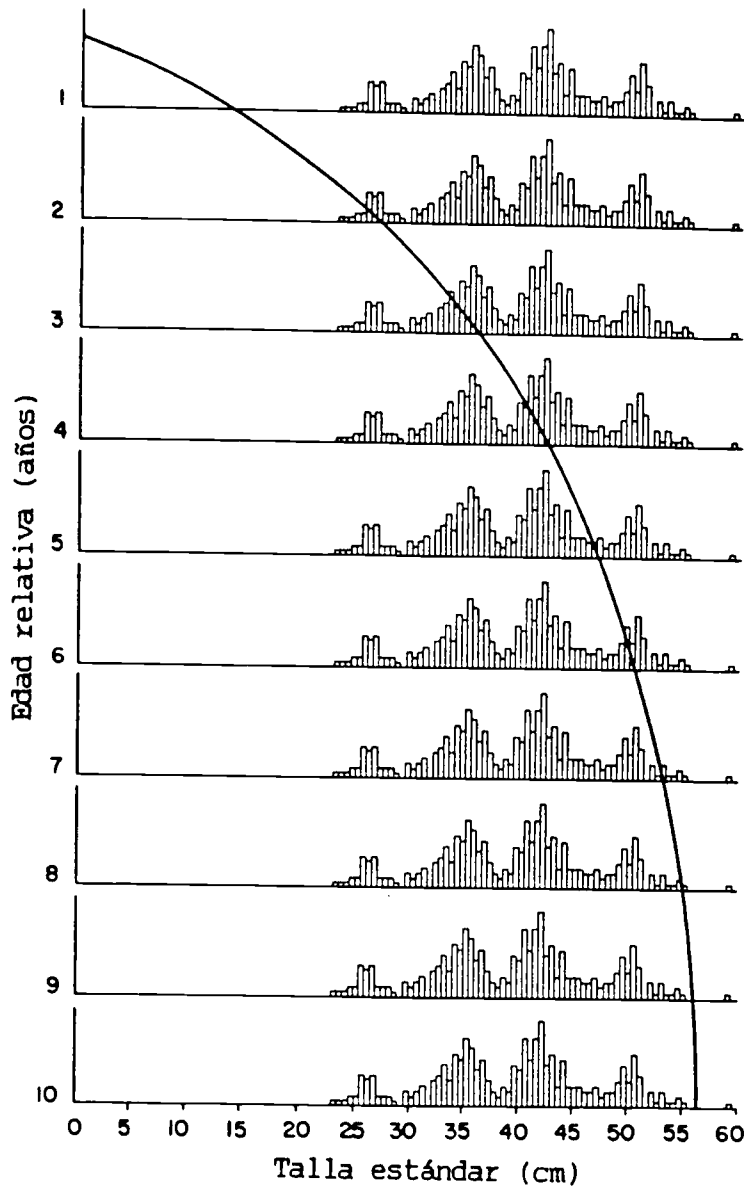


Fig. 3.5.1.2 Muestra de frecuencias de tallas de la Fig. 3.5.1.1a, repetida para 10 años, con el objeto de simular una serie de tiempo (véase la Fig. 3.5.1.3).

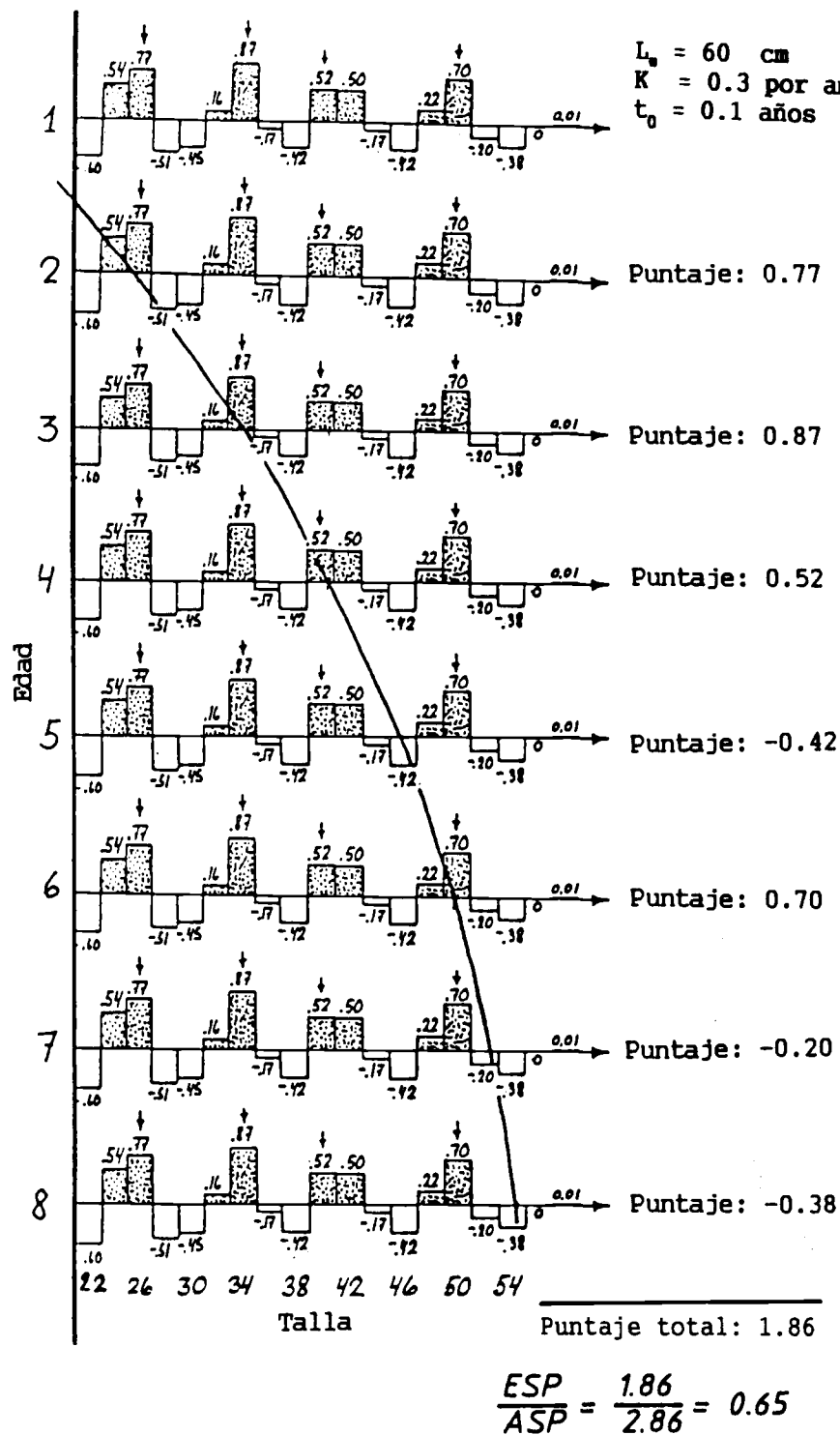


Fig. 3.5.1.3 Muestra de frecuencias de tallas reestructurada correspondiente a la Fig. 3.5.1.1c, repetida para ocho años, con el objeto de imitar una serie de tiempo (véase la Fig. 3.5.1.2). Se grafica una curva de crecimiento simple, determinada con los parámetros $L_{\infty} = 60 \text{ cm}$, $K = 0.3 \text{ por año}$, y se indica la bondad del ajuste (ESP/ASP).

Para entender el concepto de "SME", examine la Fig. 3.5.1.3. El ajuste más convincente de una curva de crecimiento es el que alcanza todos los máximos indicados por las flechas. Sin embargo, puede que no exista una curva de crecimiento de von Bertalanffy de ese tipo; por lo tanto, se ha introducido el concepto de "puntaje" para medir cuán cerca está una curva del mejor ajuste. Siempre que una curva alcanza una barra, positiva o negativa, gana "puntos". El puntaje total de una curva de crecimiento es la suma de los puntos anotados de cada muestra, como se indica en la Fig. 3.5.1.3.

El valor "SMD" (suma de máximos disponible) es el puntaje máximo que una curva puede alcanzar, es decir, la suma de los máximos positivos indicados por las flechas. Estas flechas se encuentran dondequiera que haya una secuencia de barras positivas. (En este contexto, una "secuencia" puede ser una única barra). De este modo, la razón SME/SMD se convierte en una forma de medir cuán cerca está una curva del mejor ajuste posible.

El procedimiento computacional descrito hasta aquí se puede realizar con papel y lápiz en un tiempo razonable para una única curva de crecimiento. Pero después no es posible (en la práctica), seguir manualmente la ejecución del ELEFAN I. Una de las características principales del programa ELEFAN I es que se realizan muchas pruebas, a veces miles, con curvas de crecimiento diferentes, en la forma indicada en la Fig. 3.5.1.3. Entre las miles de curvas de crecimiento posibles, se selecciona la que produce el valor más alto de SME/SMD.

(Véanse los **Ejercicios** en la Parte 2).

3.5.2 La ecuación de crecimiento de von Bertalanffy estacionalizada

La Fig. 3.5.2.1 muestra una aplicación del programa ELEFAN I con un camarón peneido. La curva de crecimiento estimada por ELEFAN I claramente no corresponde a una curva de crecimiento de von Bertalanffy, ya que $\Delta L/\Delta t$ no disminuye linealmente con la edad (véase la Sección 3.1). La explicación es que ELEFAN I trabaja con la "ecuación de crecimiento de von Bertalanffy estacionalizada" (Pitcher y Macdonald, 1973; Cloern y Nichols, 1978 y Pauly y Gaschütz, 1979):

$$L(t) = L_{\infty} * [1 - \exp(-K * (t - t_0) - (CK/2\pi) * \sin(2\pi * (t - t_v)))] \quad (3.5.2.1)$$

Esta es la ecuación normal de von Bertalanffy (Ec. 3.1.0.1), pero con un término adicional:

$$(CK/2\pi) * \sin(2\pi * (t - t_v))$$

donde $\pi = 3.14159\dots$

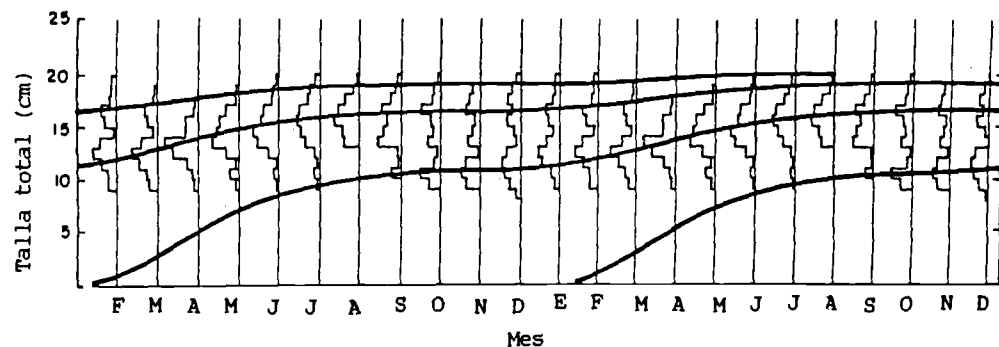


Fig. 3.5.2.1. Ejemplo de una curva de crecimiento con oscilaciones estacionales, estimada a través del programa ELEFAN I (Pauly, 1981). Datos de Rodríguez (1977) del camarón hembra (*Penaeus kerathurus*) cerca de Cádiz, España. Nótese que los datos que estaban disponibles para un año han sido repetidos para imitar dos años con muestras. Los parámetros calculados son: $L_{\infty} = 21.0$ cm (talla total), $K = 0.8$ por año, $C = 0.9$, $t_i = 0.8$ (punto de invierno), $ESP/ASP = 0.46$.

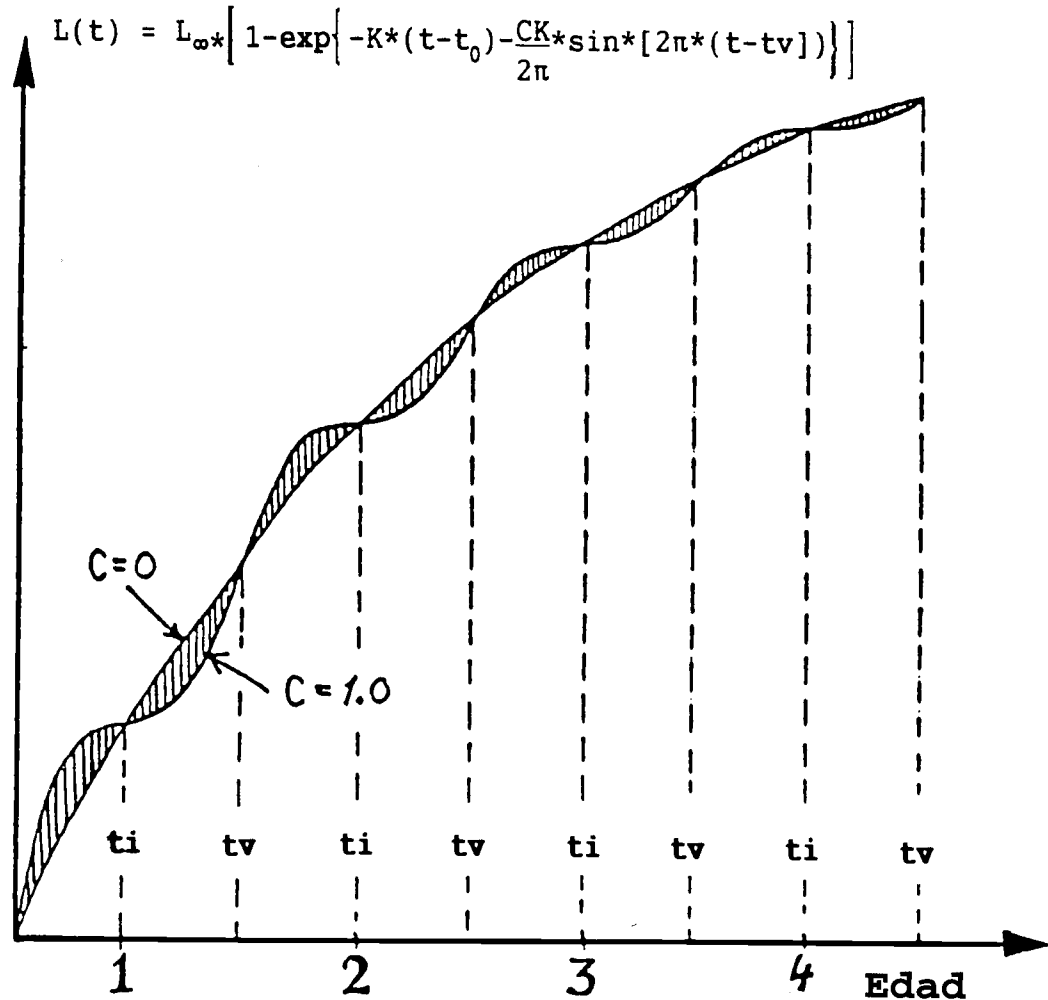


Fig. 3.5.2.2 Ecuación de crecimiento de von Bertalanffy estacionalizado. Nótese que para $C = 1$ la tasa de crecimiento es cero (la curva es horizontal), en los puntos de invierno.

Este término produce oscilaciones estacionales de la tasa de crecimiento, mediante cambios de t_0 durante el año. El parámetro “ t_v ” se denomina “*punto de verano*” y adopta un valor entre 0 y 1. En el momento del año en que la parte t_v del año ha pasado, la tasa de crecimiento es máxima. En el momento $t_v = t_i + 0.5$, el “*punto de invierno*”, la tasa de crecimiento es mínima. El parámetro C , la “*amplitud*”, por lo general también adopta valores entre 0 y 1. Si $C = 0$, la Ec. 3.5.2.1 se reduce a la ecuación ordinaria de von Bertalanffy, es decir, $C = 0$ implica que la tasa de crecimiento no tiene estacionalidad. Mientras más alto sea el valor de C , más pronunciadas serán las oscilaciones estacionales. Si $C = 1$, la tasa de crecimiento será igual a cero en el punto de invierno. La Fig. 3.5.2.2 muestra la curva de crecimiento estacionalizada con $C = 1$, junto con una curva ordinaria de von Bertalanffy ($C = 0$). Todas las otras curvas estacionalizadas con valores de C diferentes, pero con los demás parámetros constantes, estarán en el área sombreada.

3.5.3 Métodos de máxima verosimilitud

El cálculo de un valor medio como se describe en la Sección 2.1 y el método de mínimos cuadrados expuesto en la Sección 3.3.4, son aplicaciones del “*principio de máxima verosimilitud*”.

El método que se describe en esta sección apunta a resolver el mismo problema que el método

ELEFAN I y también algunos otros problemas. La mayor diferencia radica en la definición de la bondad del ajuste. El programa ELEFAN I utiliza la razón SME/SMD (véase la Sección 3.5.1), mientras que el “*método de máxima verosimilitud*” usa la suma (ponderada) de los cuadrados de las desviaciones entre el modelo y las observaciones (o medidas con propiedades similares). En principio esta medida de la bondad del ajuste es la misma que se utilizó en el análisis de regresión lineal (véase la Ec. 2.4.3 y la Fig. 2.4.2).

Toda la teoría estadística que sustenta este método es complicada, y también lo es el programa computacional. Sin embargo, el especialista que utiliza este programa no necesita conocer todos esos detalles técnicos. Si entiende los principios básicos en que descansa el método, no debería tropezar con grandes dificultades al utilizar este programa.

La idea básica de ELEFAN I, consistente en seguir la progresión de las modas y probar un gran número de combinaciones opcionales de los parámetros de crecimiento, que corresponde también al principio en que se basa el método de máxima verosimilitud. La medida de la bondad del ajuste, usada en el método de máxima verosimilitud, se relaciona estrechamente con el llamado “*criterio de ji cuadrado (Chi-cuadrado)*”, que es conceptualmente sencillo, por lo que se utilizará a continuación para explicar el método.

En la Fig. 3.5.3.1, se proporciona una muestra que se supone está compuesta de dos cohortes. Al utilizar el programa computarizado de máxima verosimilitud con la muestra, se obtendría un resultado como el que se ilustra en la Fig. 3.5.3.2, donde las curvas punteadas representan a las dos cohortes y la línea continua a la suma de las frecuencias calculadas de estas dos cohortes. Los puntos indican las frecuencias observadas originales, y las barras indican las diferencias entre las frecuencias observadas y calculadas.

Además de los parámetros de crecimiento, el método de máxima verosimilitud opera también con los siguientes parámetros (en el caso de dos cohortes):

- N1 = número total de observaciones en la primera cohorte
- N2 = número total de observaciones en la segunda cohorte
- s1 = desviación estándar de la primera cohorte
- s2 = desviación estándar de la segunda cohorte

Las tallas medias, \bar{L}_1 y \bar{L}_2 , se obtienen de los parámetros de crecimiento. Para ello, véase la Fig. 3.5.3.2, donde se muestran, a título de ejemplo, las tallas medias \bar{L}_1 y \bar{L}_2 correspondientes a las edades arbitrarias t_1 y t_2 . A partir de los parámetros se pueden determinar, la frecuencia calculada (teórica) de cada cohorte, $f_{c1}(L)$ y $f_{c2}(L)$, y la frecuencia total en cada grupo de tallas, como se explicó en la Sección 2.2. Así,

$$f_{c_{total}}(L) = f_{c1}(L) + f_{c2}(L)$$

La medida de bondad del ajuste, el “*criterio de ji cuadrado*”, se define como:

$$\chi^2 = \sum \frac{[f_{obs}(L) - f_{c_{total}}(L)]^2}{f_{c_{total}}(L)} \quad (3.5.3.1)$$

que es la suma de todos los valores de $f_{c_{total}}(L) > 0$, donde $f_{obs}(L)$ corresponde a la frecuencia observada en el grupo de tallas L (= punto medio del intervalo). Esto es utilizado para minimizar las diferencias entre las frecuencias observadas y las calculadas a lo largo de todo el rango de tallas de la muestra.

El programa de máxima verosimilitud determina el conjunto de parámetros (L_{∞} , K , t_0 , N_1 , N_2 , s_1 y s_2) que reducen al mínimo el criterio de ji cuadrado. La comparación con la Ec. 2.4.3 (“ $f_{c_{total}}$ ” y “ f_{obs} ” corresponden a “ $a + b \cdot x(i)$ ” e “ $y(i)$ ”, respectivamente) ilustra la relación entre el criterio de ji cuadrado y la regresión lineal. La Fig. 3.2.2.2 muestra otro ejemplo de lo que se obtendría con el

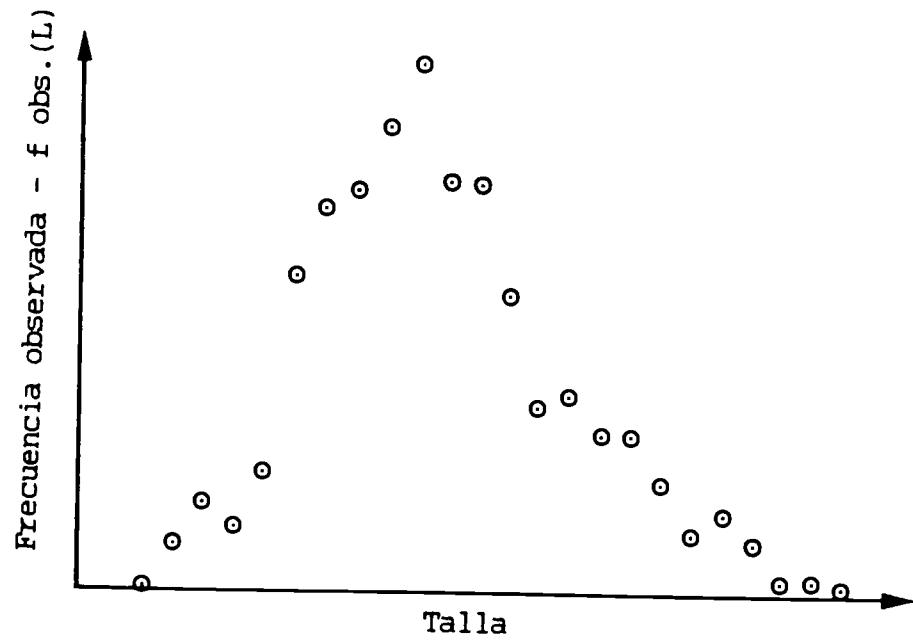


Fig. 3.5.3.1 Datos básicos a partir de los cuales se deriva la resolución en componentes de distribución normal de la Fig. 3.5.3.2.

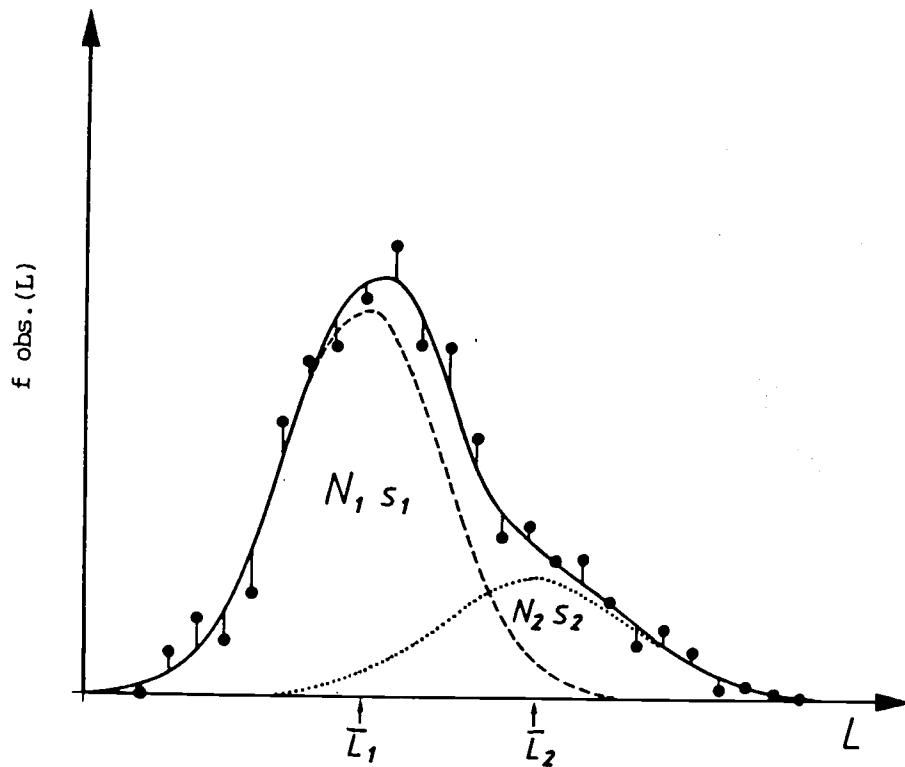


Fig. 3.5.3.2 Ilustración del criterio de chi-cuadrado. Los datos de entrada provienen de la Fig. 3.5.3.1. También se deben ingresar como datos de entrada el número de cohortes esperado.

método de máxima verosimilitud de una muestra de frecuencias de tallas, si el número de cohortes fuera igual a seis.

Debido a que el criterio de ji cuadrado es una medida estándar de bondad de ajuste cuando se trabaja con frecuencias, la lista de referencias relacionadas con este concepto es sumamente extensa. Una buena introducción a la teoría (escrita para biólogos) es la que aparece en Sokal y Rohlf (1981, Capítulo 17).

El método de máxima verosimilitud entrega también los números de individuos y las desviaciones estándar, además de los parámetros de crecimiento. El programa requiere los mismos datos de entrada que ELEFAN I, pero además hay que introducir el número de cohortes de la muestra. En muchos casos este número no se conoce y lo que se introduce es un estimación razonable de dicho número. No obstante, este dato adicional no parece crear grandes problemas prácticos.

El programa de máxima verosimilitud funciona como un “*proceso iterativo*”. Esto significa que hay que proporcionarle una hipótesis inicial de la solución esperada, que luego se va mejorando en una serie de etapas iterativas. Por lo tanto, para comenzar el procedimiento de estimación de máxima verosimilitud se necesita una aproximación de la respuesta del ejercicio. Esta solución inicial se puede obtener, por ejemplo, del análisis de Bhattacharya y del análisis de progresión modal, descritos en las Secciones 3.4.1 y 3.4.2. El método de máxima verosimilitud no descarta el uso de métodos manuales. Estos siguen siendo necesarios para comenzar el proceso de iteración y, lo que es quizás más importante, para evaluar los resultados. La búsqueda de un conjunto aceptable de valores iniciales es a menudo la parte más lenta del trabajo.

La Fig. 3.5.3.3 ilustra el procedimiento de la estimación de máxima verosimilitud. Generalmente, el punto de partida se denomina “*supuesto inicial*” de la solución. Sin embargo, llamarlo “supuesto” puede no ser apropiado, ya que éste se debe aproximar bastante a la solución final para hacer converger el proceso iterativo. Por lo tanto, es importante tener un método sencillo y seguro para obtener un primer “supuesto razonable” de la solución. Por ejemplo, se podría usar el método de Bhattacharya y el análisis de progresión modal.

Otra característica del método de máxima verosimilitud es que entrega estimaciones de los límites de confianza de todos los parámetros, que no se pueden obtener con el método de Bhattacharya y el análisis de progresión modal. Los límites de confianza del análisis de progresión modal que aparecen en la Tabla 3.4.2.3 se basan en el supuesto de que las estimaciones del análisis de Bhattacharya tienen varianzas cero. El método de máxima verosimilitud no requiere este tipo de supuestos (que son muy poco realistas).

Para terminar esta breve exposición sobre el método de máxima verosimilitud se incluirán unas pocas palabras adicionales acerca de su evolución histórica. Sus inicios son casi tan antiguos como el trabajo pionero de Petersen sobre las frecuencias de tallas de peces (véase la Sección 3.4), pues en 1894 Pearson presentó su trabajo sobre la separación de las frecuencias en componentes distribuidos normalmente.

Programas computacionales

Uno de los primeros programas de computador para separar las frecuencias en componentes normalmente distribuidos, con técnicas de máxima verosimilitud, fue el programa “NORMSEP” de Hasselblad y Tomlinson (1971). El NORMSEP se basó en el trabajo realizado por Hasselblad (1966). Otra contribución importante a la separación de frecuencias de tallas de peces en componentes normalmente distribuidos fue la de Macdonald y Pitcher (1979). Este trabajo fue ampliado por Schnute y Fournier (1980) para incluir la estimación de los parámetros en el caso de la muestra única. Esta contribución fue ampliada a su vez por Sparre (1987a) para tratar el caso de la serie de tiempo y la curva de crecimiento de von Bertalanffy estacionalizada, así como algunos otros aspectos, cuya teoría se examinará en la sección siguiente. El programa NORMSEP está incluido en el paquete computacional FiSAT.

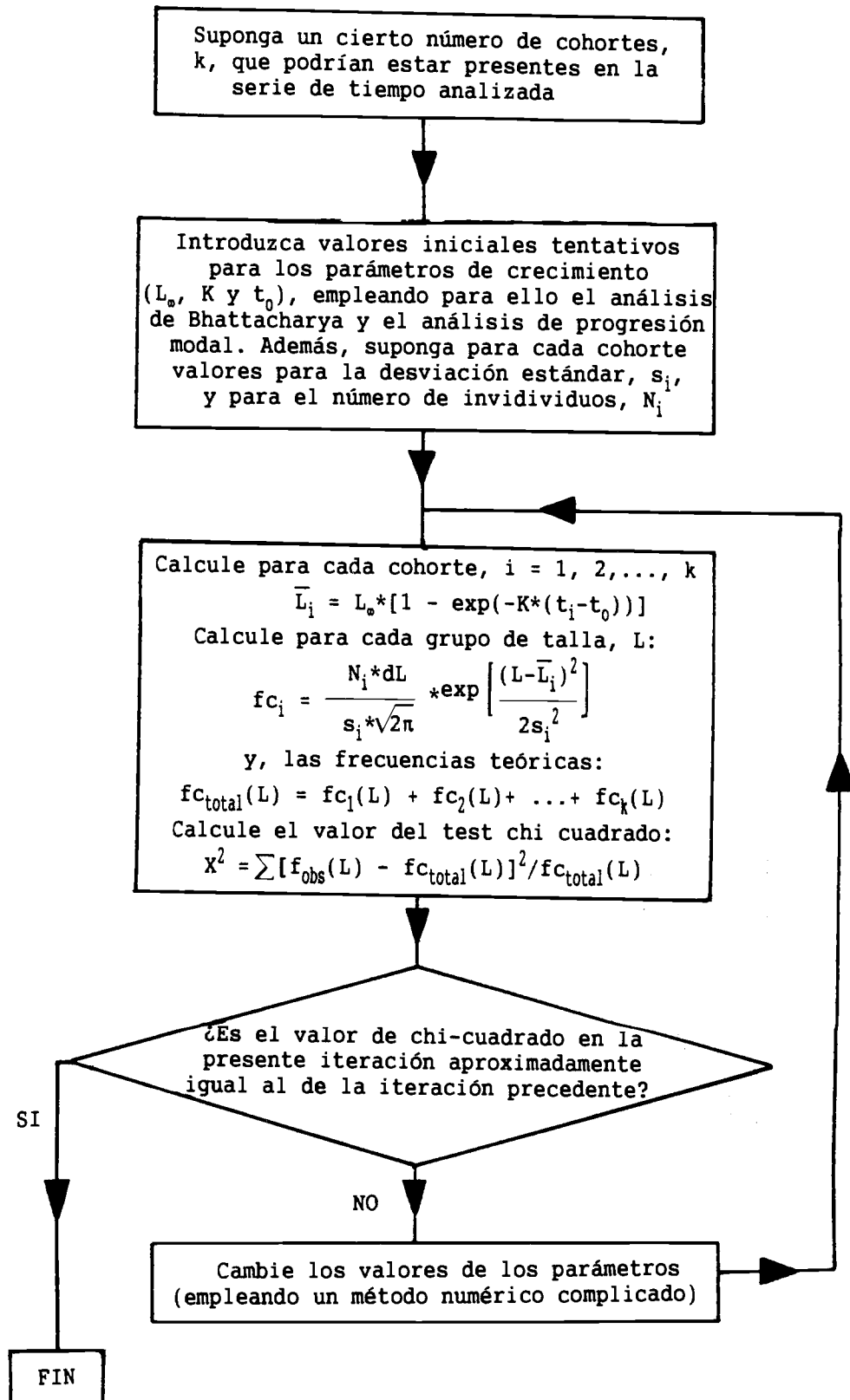


Fig. 3.5.3.3 El proceso iterativo del procedimiento del cálculo de máxima verosimilitud (Véase también la Fig. 3.5.3.2).

3.5.4 Limitaciones del análisis de frecuencias de tallas

Como se puede ver en los ejemplos (Sección 3.4 y 3.5) a menudo es difícil resolver una distribución mixta. En especial crean problemas los peces viejos (de mayor talla). Intuitivamente cabe suponer que la separación en componentes resulta problemática cuando las medias de los componentes vecinos están próximas entre sí, en comparación con el tamaño de las desviaciones estándar.

Aplicando métodos estadísticos más rigurosos que los presentados en este manual, Hasselblad (1966), McNew y Summerfelt (1978) y Clark (1981) han demostrado que el "índice de separación":

$$I = \frac{\bar{L}(a+1) - \bar{L}(a)}{[s(a+1) + s(a)]/2} \quad (3.5.4.1)$$

es una cantidad que hay que estudiar cuando se evalúa la posibilidad de separar dos componentes cercanos. \bar{L} representa la media y s la desviación estándar (véase la Fig. 3.5.4.1). Sin entrar en detalles, el descubrimiento principal de los tres trabajos antes mencionados puede resumirse en la siguiente regla práctica: Si el índice de separación, I , es inferior a dos, $I < 2$, es prácticamente imposible separar los componentes.

La Fig. 3.5.4.1 muestra un ejemplo de dos componentes distribuidos normalmente con $I = 2$. La Fig. 3.5.4.2 ilustra la relación funcional típica entre el índice de separación y la varianza de las estimaciones. (Para mayores detalles, véase por ejemplo, Hasselblad, 1966).

Como ejemplo, observe la Tabla 3.2.1.1 (es decir, los datos hipotéticos usados para ilustrar los métodos manuales). En la Tabla 3.5.4.1 se han calculado los índices de separación de los seis componentes. Estos se conocen debido a que los datos son hipotéticos o calculados. Supongamos que los datos hubieran sido datos reales, cuyos parámetros verdaderos no se conocieran. En ese caso, sólo se tendría la posibilidad de estimar tres componentes. Esta conclusión es válida para *todos los métodos*, incluidos los métodos computarizados más complejos.

Otra manera de explorar las limitaciones del análisis de frecuencias de tallas es la "técnica de simulación de Monte Carlo", con la que se simulan muestras de frecuencias de tallas en un computador

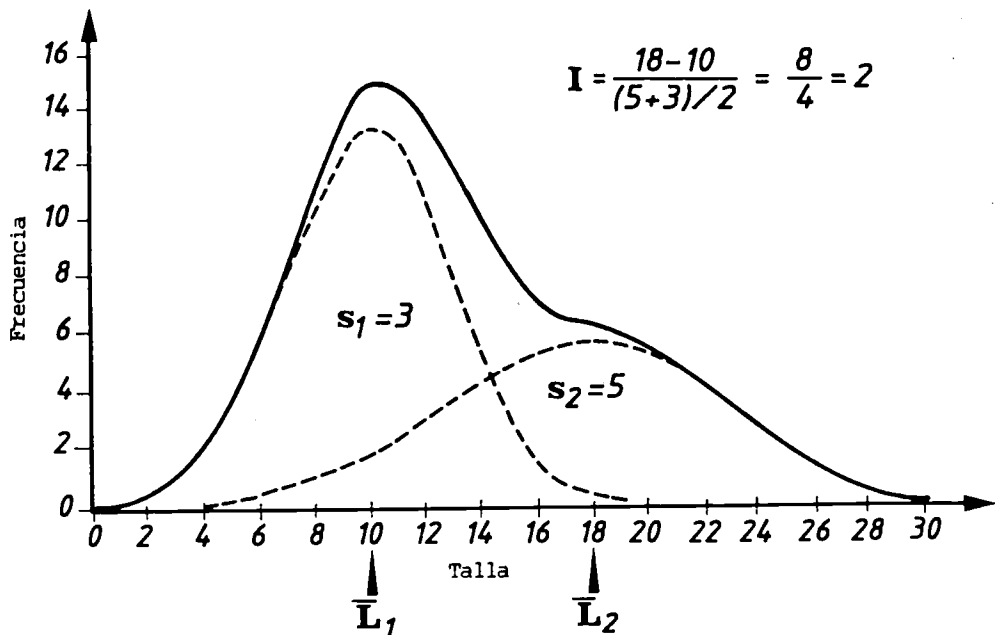


Fig. 3.5.4.1 Ejemplo de dos componentes distribuidos normalmente con un índice de separación crítico de $I = 2$.

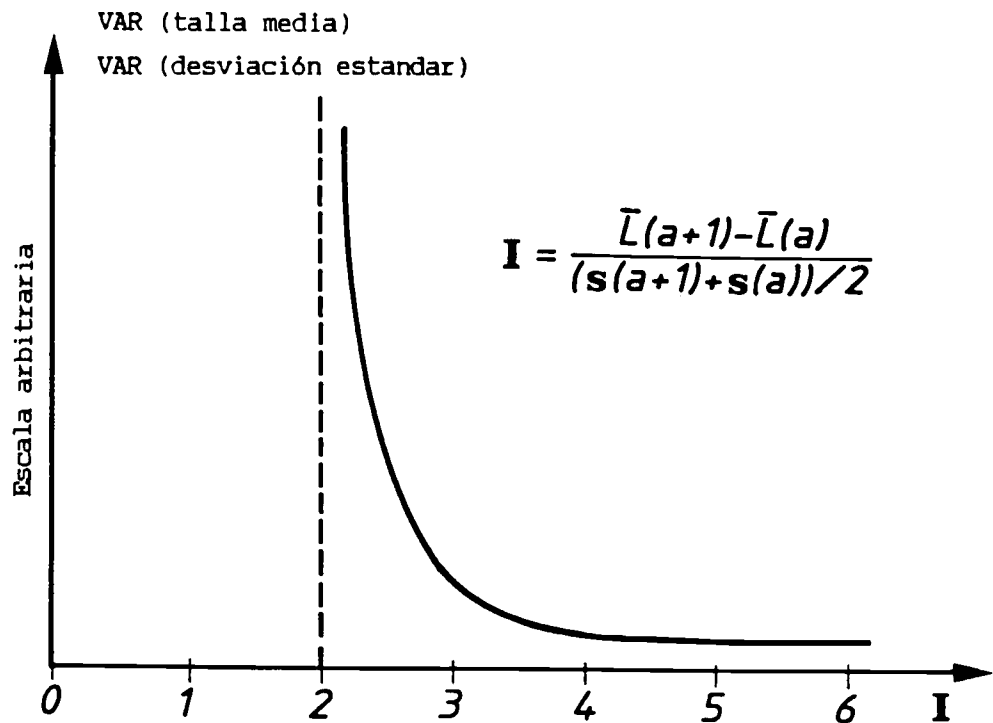


Fig. 3.5.4.2 Descripción general de la relación funcional entre el índice de separación I y las varianzas de las estimaciones.

(véase la Sección 3.2.1). La técnica se llama “Monte Carlo”, porque incluye un componente de “variabilidad al azar”, el principio de la “ruleta”, que se añade a todas las observaciones simuladas. Trabajando con suposiciones respecto a los valores de los parámetros y de la magnitud del compo-

TABLA 3.5.4.1
Indices de separación calculados para el ejemplo de la
Sección 3.4.1. Los parámetros marcados con el signo “*”
no pueden ser estimados a partir únicamente de los datos
de frecuencias de tallas
(véase la Tabla 3.2.1.1 y la Fig. 3.2.2.2)

a	$\bar{L}(a)$	s(a)	$I = 2 * \frac{\bar{L}(a+1) - \bar{L}(a)}{s(a+1) + s(a)}$
1	17.3	1.7	4.82
2	27.9	2.7	2.43
3	35.3	3.4	1.40
4	40.2 *	3.6 *	0.84
5	43.3 *	3.8 *	0.59
6	45.5 *	3.6 *	

nente aleatorio y, simulando las correspondientes muestras de frecuencias de tallas, se pueden evaluar los distintos métodos. El procedimiento funciona de la siguiente manera:

Paso 1: Se definen valores supuestos para los parámetros y la magnitud del componente estocástico;

Paso 2: Se simula una serie de tiempo de frecuencias de tallas de acuerdo con el paso 1;

Paso 3: Se analizan los datos simulados (como si no se conocieran los parámetros) usando, por ejemplo, los análisis de Bhattacharya y de progresión modal; y,

Paso 4: Se comparan los resultados del paso 3 (si los hay) con los parámetros “verdaderos” del paso 1.

Con este procedimiento se puede establecer, por ejemplo, si para una población de peces que tiene distribuciones de tallas con determinados parámetros, es posible o no estimar los parámetros de crecimiento con cierta exactitud, previamente especificada.

En relación con las limitaciones del análisis de frecuencias de tallas, cabe mencionar también las dificultades para obtener muestras insesgadas. Probablemente la fuente más importante de sesgo sean las migraciones de los peces. Las limitaciones de los métodos basados en las tallas aplicados a las poblaciones de especies migratorias se examinan en el Capítulo 11.